代数学講義
改訂新版

高木貞治著

共立出版株式会社

序　　言

本書は著者がかつて東京大学で初級生のためにした一般向きの代数学講義に基づいて，それに多少の布桁を加えたものである．この講義の目的は，僅少なる時間に於て，迅速に代数学の基本概念を解説するにあった．従って本書の目標とする所も，代数学の大観であって，系統的なる全書ではない．代数学の広汎なる全範囲に亘って，それを系統的に叙述することは，全く意図の外において，むしろ材料を最も基本的なる問題に局限して，それらを周到に解釈する間に於て，成るべく多趣多様に代数的方法を紹介することを主眼とするのである．系統的も勿論宜しいが，いつも同じ道順と同じ日程では，興味も効果も饒なるを得ないことが虞れられる．このような考慮を念頭において，本書の稿に筆をとった著者の微意が，如何なる程度にまで貫徹されたかは，読者の高鑑に任せる外はない．

本書の構成は概括的にいって，二部に分かれる．その第1部，第1章から第7章までは，方程式論であるが，更に細分すれば，その前半，第1章から第3章までは，いわゆる代数学の基本定理を中心とするもので，要するに多項式の解析学であって，そこでは複素数が立役である．またその後半，第4章から第7章までは，代数的方程式論の端緒で，そこでは群（Group）体（Field）などの初舞台を見るであろう．

第2部，第8章から第10章までは，行列式とその応用とを論ずる．行列式よりも，むしろ行列そのものが，輓近数学の各部門に於て重大性を有する現状に鑑みて，この部分では，行列論的の考察を基調とする．

前にいった大学の講義には，数学常識としての整数論の極小量が含まれていたのであるが，それは本書の姉妹篇ともいうべき「初等整数論講義」の中に収録されている．代数学と平行して，初等整数論の一班が修得されることは，甚だ望ましいのであるから，ここに附言するのである．

今世紀の二十年代を転機として，数学は各方面に劃期的の新生面を開いたが，その誘因は実に代数学に於ける抽象的方法の発展にあったのである．この新思潮の背景または基盤として，古典代数学がその存在理由を失なったのでないことは勿論で，むしろ却って新興代数学の階梯として，一層重大性を加えたものと思われる．このような考慮から，今回本書の改訂に際しても，成るべくその原形を保存することを主眼として，ただ若干の削正及び追加を施こすに止めたのである．

1948 年 10 月

著　　者

改 訂 新 版 序

本書の著者は1960年２月28日に逝去した．今回改訂新版の出版にあたって出版元に寄せられた読者の希望に基づく出版社の要望によって本文および凡例を「現代かなづかい」，「当用漢字」に基づく現代の慣用文に，また術語の一部を現在の慣用語に書き改めるとともに平がなを採用した．ただし旧版の体裁をできるだけ保存するために，改訂は必要の最小限にとどめるように努めた．改訂にあたって理学博士黒田成勝，同黒田成俊両氏の援助を得た．とくに黒田成俊氏は改訂原稿および校正刷を綿密に検討して多くの注意を与えられた．また出版に際して共立出版株式会社の折居峻生，犬飼登祉子両氏の援助を得た．ここに感謝を表明する．

1965年11月

高 木 佐 知 夫

凡　　例

（1） 本書の各章を節（§）に分けて，その各節をなるべく互いに独立にも読み得るようにする．節は長短不同であるが，長いものは便宜上更に項（1, 2, 3など）に分ける．

（2） 引用の便宜上，掲出の定理に番号をつける．〔定理 $m.n$〕は第 m 章の第 n 定理である．

（3） 本書の主体である本文（9ポイント活字の部分）では，本書成立の由来上，叙述はむしろ講話式で，教科書流の堅苦しい様式を避けたために，冗長をいとわないで頁数の膨大を来たしたのである．

（4） 本書には原則として，いわゆる練習問題を載せない．〔問題〕として掲出したのは，むしろ本文の延長であるが，その説明を本文同様に詳細にすることは，ページ数の制限上不可能であるから，一々〔解〕をつけてはおいたが，要点だけに限ることは止むを得ないのであった．読者がそれを練習問題と見なして，自発的考察の材料とすることは，勿論著者の希望するところである．

（5） 学用語の国訳は現今一定になっていない．本書の用例はすべて暫定的である．著者の意見は学用語の国際的であることを第一として，用語の妥当性を第二におくのであるから，なるべく直訳式に一原語に対して一邦語を目標とした．たとえば primitive はいつでも「原始」，irreducible はいつでも「既約」など．

（6） 序言にも述べたように，本書はむしろ各題目に関する単行編の集成である．特に，第2章における Hermite, Gauss, Laguerre の諸定理，あるいは第2章，第10章における Sturm の問題など，特別の問題に関して多くの頁数を費やしたことは，均衡を失する観がないでもないが，これは

「広よりも深」をモットーとする本書の本質から出たものである．読者が練習資料として，これを利用することを希望する．

目　　　次

第1章　複　素　数

第2章　方程式論の基本定理

第3章　スツルムの問題，根の計算

第4章　多項式の整除

第5章　対称式, 置換

第6章　三次および四次方程式

第7章　不可能の証明

第8章　行　列　式

第9章　二 次 形 式

第1章　複　素　数

§1.　実数の四則

1.　本書においては，実数およびその四則は既知とみなすのであるが，いまここにその要点を略説する．

実数の四則は次の原則によって支配される．

（1）　加法の一意性．　$a+b=c.$

これは，二つの実数 a, b が与えられたときに，$a+b$ なる実数 c が，必ず，しかもただ一つに限って存在するのをいうのである．すなわち加法が可能で，しかも一意的に可能なのである．

（2）　加法の結合法則．　$(a+b)+c=a+(b+c).$

結合法則は括弧のつけようによって生ずる加法の過程の変換が，最後の和に影響を及ぼさないことをいうのであるが，三つの数の間にその法則が成り立てば，それから容易に，三つよりも多くの数に関しても成り立つことを証明することができる．ゆえに，結合法則を上のようにいい表わすのである．

（3）　加法の交換法則．　$a+b=b+a.$

（4）　乗法の一意性．　$ab=c.$

（1）と同様．

（5）　乗法の結合法則．　$(ab)c=a(bc).$

（2）と同様．

（6）　乗法の交換法則．　$ab=ba.$

（7）　加法に対する乗法の分配法則．　$(a+b)c=ac+bc.$

（8）　減法の一意性．　a, b が与えられたとき，$a+x=b$ は必ず，しかもただ一つの解をもつ．

その解を求めるのがすなわち減法である．

0に関する四則の法則は，これらの原則中に含まれている．a が任意の実数であるとき

$$0+a=a,$$

$$0\cdot a=0.$$

前者は明白としておいて，分配法則と減法の一意性とから後者を導こう．分配法則によって

$$(0+b)a=0\cdot a+ba,$$

すなわち
$$ba=0\cdot a+ba,$$

ゆえに，減法の一意性によって

$$0\cdot a=0$$

を得る．

（9） 除法の一意性． $a\neq 0$ と b とが与えられたとき，$ax=b$ は必ず，しかもただ一つの解をもつ．

$a=0$ とすれば，$ax=0$ であるから，$b\neq 0$ ならば $ax=b$ は不可能で，$b=0$ ならばまったく不定である．ゆえに除法においては，除数 a に関して $a\neq 0$ という制限が必要である．

除法の一意性からの重大な帰結は次の法則である．

（10） 実数の積が 0 に等しいときは，因数の中に 0 に等しいものがある．

実際 $a\neq 0$，$ab=0$ とすれば，除法の一意性によって $b=0$ を得る．すなわち $ab=0$ ならば，$a=0$ または $b=0$ である．同じように，$abc=0$ ならば，$a=0$ または $bc=0$，したがって $b=0$ または $c=0$ である．

2. 上の九原則のうち（1）～（7）はすでに自然数（1, 2, 3, ……）の範囲内においても成立するものであるが，（8），（9）が成り立つためには数の範囲を有理数の全体にまで拡張することが必要である．しかるに，連続的の量の大きさを完全に表わすためには，有理数だけでは不十分である．そこで無理数を導入して数の範囲を実数の全部にまで拡張する必要が生ずる．上の（1）～（9）の原則は実数の範囲内においても成立する．特に（8），（9）は，つまり実係数をもつ一次式 $ax+b$ が任意の実数値 c をとるような x の実数値が存在することを示すものである．すなわち，一次方程式が実数の範囲内において解をもつのである．

二次以上の方程式においては事情がまったく違う．すでに二次方程式を一般的に解くためには，いわゆる虚数が必要であることが早くから認められたのである．実数と虚数とを総括して，Gauss 以来それを複素数とよぶ．数の範囲を複素数にまで拡張することは，方程式論のみでなく，現今の数学の各部門にお

いて肝要であって，実数のみに関する問題においても，それを複素数の立場から考察すると，明瞭に解決される場合が多い．

これは次元の拡張であって，あたかも上空から見おろすと，地上の光景が明快に観取されるようなものである．

§ 2. 複素数の四則

1. 複素数は二つの実数 a, b と記号 i とから組み立てられた式

$$a+bi$$

である．複素というのは，単一に対する複成の意味である．すなわち，実数がただ一つの単位1に基づいて構成されるのに対して，複素数が二つの互いに独立な単位1および i に基づいて構成されることを示すのである $(a\cdot 1+b\cdot i)$．標語的にいえば，実数は一次元の数で，複素数は二次元の数である．

二つの複素数 $a+bi$, $a'+b'i$ が相等しい，すなわち

$$a+bi=a'+b'i$$

とは，$a=a'$, $b=b'$ が同時に成り立つことであると定める．上文で，単位 1, i が互いに独立であるといったのは，この意味である．この規定に従えば，「等しい」という関係は複素数に関しても，実数と同様に，次の三つの条件を満たすことになる．

（第一） 反射的 (reflexive) である．すなわち，複素数はそれ自身に等しい．任意の複素数を α で表わせば

$$\alpha=\alpha.$$

（第二） 対称的 (symmetrical) である．すなわち

$$\alpha=\beta \quad ならば \quad \beta=\alpha.$$

上文で「相等しい」といったのは，この意味である．

（第三） 推移的 (transitive) である．すなわち

$$\alpha=\beta,\ \beta=\gamma \quad ならば, \quad \alpha=\gamma.$$

「等しい」という語で表わされる関係は，数学の各部門において，種々の場合に種々の意味で用いられるのであるが，それはいつでも上記の三つの条件が満たされたときに限るのである．たとえば，形の等しいことを表わす相似，または方向の等しいことを表

わす平行など，みな同様である．

2.　複素数の四則（加減乗除）は形式上実数の四則と同様の原則に従うように定める．すなわち虚数単位 i が，実数を表わす代数文字である場合と同様にするのであるが，ただ i^2 は随時 -1 で置き換えることにする．

しからば，まず加法と乗法とに関して，次のようになる．

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i,$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i.$$

この規定によれば，複素数の加法，乗法は，実数と同様に結合，交換および分配の法則に従う．すなわち α，β，γ が複素数を表わすとき

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \qquad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),$$

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \qquad \alpha\beta=\beta\alpha,$$

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

したがって，これらの法則に基づいて，実数の加法，乗法に関して成り立つすべての公式は，形式上複素数にもあてはまる．

3.　減法と除法とは，それぞれ加法と乗法との逆の算法とすることは，実数の場合と同様である．

まず減法に関しては，$\alpha-\beta$ は，それを β に加えるとき，和が α に等しくなるような複素数である．したがって

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i.$$

すなわち減法は一意的に可能である．

特に $\alpha-\alpha$ は $0+0i$ に等しい．これを単に 0 としるす．よって α を任意の複素数とするとき

$$\alpha-\alpha=0, \qquad \alpha+0=\alpha.$$

分配法則と減法の一意性とから任意の複素数 α に関して

$$0\cdot\alpha=0$$

を得ることは実数の場合と同様である．

上記の加法，乗法の定義によれば，$a+0\cdot i$，$a'+0\cdot i$ のような複素数の和と積とは，$(a+a')+0\cdot i$ と $aa'+0\cdot i$ とであって，それは実数 a，a' の加法または乗法とまったく同様である．よってこれらの複素数を単に a，a' としるし，それらを実数と差別しない

ことにする．すなわち実数を複素数の特別の場合と見るのである．同じように，$0+bi$ のような複素数を単に bi としるす．これを純な虚数ということもある．

この記法にしたがって $a+bi=(a+0\cdot i)+(0+bi)$ とすれば，複素数の記号 $a+bi$ における $+$ を，やはり複素数加法の意味における $+$ とみなすことができる．

また $1\cdot i$ を単に i としるせば，乗法の規定から

$$(b+0\cdot i)(0+1\cdot i)=0+bi$$

を得るから，複素数乗法の記号における bi も複素数乗法の意味における積（b と i との積）とみなされる．

なお，一つの因数が実数であるとき，積は次のようになる

$$a(a'+b'i)=aa'+ab'i. \tag{1}$$

4. $\alpha=x+yi$ という複素数において，y の符号を変えた $x-yi$ を α と**共役**な複素数といい，通例それを $\bar{\alpha}$ で表わす．すなわち，$\alpha=x+yi$ と $\bar{\alpha}=x-yi$ とは互いに共役である．特に α が実数であるときは $\alpha=\bar{\alpha}$ で，また α が純虚数であるときは $\bar{\alpha}=-\alpha$ である．$\alpha+\bar{\alpha}=2x$ および $\alpha\bar{\alpha}=x^2+y^2$ は実数である．前者を α（または $\bar{\alpha}$）の**スプール**（Spur），後者を**ノルム**（Norm）といい，それぞれ次のようにしるす．

$$\mathrm{S}(\alpha)=\mathrm{S}(\bar{\alpha})=\alpha+\bar{\alpha}, \qquad \mathrm{N}(\alpha)=\mathrm{N}(\bar{\alpha})=\alpha\bar{\alpha}.$$

$\mathrm{N}(\alpha)$ は上のとおり x^2+y^2 に等しいから，正の実数である．ただし $\alpha=0$ のときに限って 0 になる．

5. さて除法であるが，それは α，β が与えられた複素数であるとき，$\alpha z=\beta$ という方程式を満足させる複素数 z を求める算法である．$\alpha=0$ のときは，z の如何にかかわらず，$\beta=0$ にならねばならないから，$\beta\neq 0$ の場合には，この算法は不可能で，$\beta=0$ の場合にはまったく不定である．よって除法に関しては，$\alpha\neq 0$ という制限を設けることが必要である．

まず，$\alpha=a$ が実数である場合は簡単である．すなわち

$$\frac{a'+b'i}{a}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}i. \tag{2}$$

右辺の複素数に a を乗ずれば，（1）によって $a'+b'i$ を得る．

一般の場合において

$$\alpha\neq 0, \qquad \alpha z=\beta$$

とすれば，両辺に $\bar{\alpha}$ を乗じて

$$\mathrm{N}(\alpha)z=\bar{\alpha}\beta.$$

$\mathrm{N}(\alpha)$ は実数であるから，（２）のように

$$z=\frac{\bar{\alpha}\beta}{\mathrm{N}(\alpha)}.$$

逆に，この関係から

$$\alpha z=\frac{\mathrm{N}(\alpha)\beta}{\mathrm{N}(\alpha)}=\beta$$

を得るから，$\alpha\neq 0$ のとき除法は一意的に可能である．

すなわち　$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}\beta}{\mathrm{N}(\alpha)}.$$

$\alpha=a+bi,\ \beta=a'+b'i$ とおいて商を詳しくしるせば次のとおり．

$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i.$$

特に $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ の場合には，$\alpha z=0$ から $z=0$ を得る．すなわち，積が 0 に等しいときには，因数のうち少なくとも一つは 0 に等しい．この重要な法則が除法の一意性から得られることは実数の場合と同様である．

複素数の四則の意味は上のとおりである．要約すれば，複素数の四則は §1 に掲げた（１）～(10) の原則に従うものである．

〔**問題 1**〕 α, β が複素数ならば，$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, β/α の共役複素数は $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}-\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}\bar{\beta}$, $\bar{\beta}/\bar{\alpha}$ である．一般に $\mathrm{F}(x,y,\cdots)$ が実係数の有理函数ならば，$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\cdots)$ の共役複素数は $\mathrm{F}(\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\cdots)$ である．

〔**問題 2**〕
$$\mathrm{N}(\alpha\beta)=\mathrm{N}(\alpha)\cdot\mathrm{N}(\beta). \tag{3}$$

これから次の恒等式を得る．

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2. \tag{4}$$

〔解〕（３）において $\alpha=a+bi$, $\beta=a'-b'i$ とおけば，（４）を得る．

〔**問題 3**〕
$$\begin{aligned}&\{\mathrm{N}(\alpha)+\mathrm{N}(\beta)\}\{\mathrm{N}(\gamma)+\mathrm{N}(\delta)\}\\&=\mathrm{N}(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta})+\mathrm{N}(\alpha\delta-\beta\gamma).\end{aligned} \tag{5}$$

これから次の恒等式を得る

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)&=(aa'+bb'+cc'+dd')^2\\&+(ab'-ba'+cd'-dc')^2\end{aligned}$$

$$+(ac'-bd'-ca'+db')^2 \qquad (6)$$
$$+(ad'+bc'-cb'-da')^2.$$

〔解〕 $N(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta})+N(\alpha\delta-\beta\gamma)=(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta})(\bar{\alpha}\gamma+\bar{\beta}\delta)+(\alpha\delta-\beta\gamma)(\bar{\alpha}\bar{\delta}-\bar{\beta}\bar{\gamma})$
$$=\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}+\beta\bar{\beta}\delta\bar{\delta}+\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta}+\beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}$$
$$=(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})(\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta})=\{N(\alpha)+N(\beta)\}\{N(\gamma)+N(\delta)\}.$$

（5）において α, β, γ, δ を実数とすれば（4）を得る．すなわち（5）は（4）の拡張である．（5）から（6）を得るには

$$\alpha=a+bi,\ \ \beta=c+di,\ \ \gamma=a'+b'i,\ \ \delta=c'+d'i$$

とおけ．

〔問題 4〕

$$\{N(\alpha_1)+N(\alpha_2)+N(\alpha_3)+N(\alpha_4)\}\cdot\{N(\beta_1)+N(\beta_2)+N(\beta_3)+N(\beta_4)\}$$
$$=N(\alpha_1\bar{\beta}_1+\alpha_2\bar{\beta}_2+\alpha_3\bar{\beta}_3+\alpha_4\bar{\beta}_4)+N(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\bar{\alpha}_3\bar{\beta}_4+\bar{\alpha}_4\bar{\beta}_3)$$
$$+N(\alpha_1\beta_3+\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_4-\alpha_3\beta_1-\bar{\alpha}_4\beta_2)+N(\alpha_1\beta_4-\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_3+\bar{\alpha}_3\bar{\beta}_2-\alpha_4\beta_1).$$

これから次の恒等式を得る．

$$(x^2{}_1+x^2{}_2+x^2{}_3+x^2{}_4+x^2{}_5+x^2{}_6+x^2{}_7+x^2{}_8)(y^2{}_1+y^2{}_2+y^2{}_3+y^2{}_4+y^2{}_5+y^2{}_6+y^2{}_7+y^2{}_8)$$
$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5+x_6y_6+x_7y_7+x_8y_8)^2$$
$$+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3+x_5y_6-x_6y_5+x_7y_8-x_8y_7)^2$$
$$+(x_1y_3-x_2y_4-x_3y_1+x_4y_2-x_5y_7+x_6y_8+x_7y_5-x_8y_6)^2$$
$$+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1+x_5y_8+x_6y_7-x_7y_6-x_8y_5)^2$$
$$+(x_1y_5-x_2y_6+x_3y_7-x_4y_8-x_5y_1+x_6y_2-x_7y_3+x_8y_4)^2$$
$$+(x_1y_6+x_2y_5-x_3y_8-x_4y_7-x_5y_2-x_6y_1+x_7y_4+x_8y_3)^2$$
$$+(x_1y_7-x_2y_8-x_3y_5+x_4y_6+x_5y_3-x_6y_4-x_7y_1+x_8y_2)^2$$
$$+(x_1y_8+x_2y_7+x_3y_6+x_4y_5-x_5y_4-x_6y_3-x_7y_2-x_8y_1)^2.$$

§ 3.　複素数の幾何学的表示

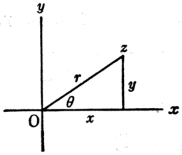
1.　複素数を幾何学的に表示するために，平面上に直交軸を取って座標（x, y）なる点で，複素数

$$z=x+yi$$

を表わすことに定めると，平面上の各点と，すべての複素数との間に，一対一の対応が生ずる．このようにして，その点で複素数を表わす平面を**複素数平面**という．

横軸（x軸）上の点は実数を表わし，縦軸（y軸）上の点は純虚数を表わすから，それらを実数軸，虚数軸という．座標の原点はすなわち0を表わすのである．

2.　点 z の極座標を r, θ とする．すなわち r は動径 oz の長さで，それは常に正，また θ は実数軸から動径 oz に至る回転の角の孤度で，その回転の向きの正負は実数軸から $+\dfrac{\pi}{2}$ の回転によって虚数軸に達するように定める．普通は右の図のように，時計の針と反対の向きを正とする．



極座標を用いて複素数 $z=x+yi$ を表わすならば

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である．r を複素数 z の**絶対値**といい，それをしるすには Weierstrass の記号を使って

$$r=|z|$$

とする．また θ を複素数 z の**偏角**という．本書ではそれを

$$\theta=\operatorname{arc} z$$

としるす． arc の代わりに arg ともしるされる．一つの複素数の偏角はまったく確定ではない，それに 2π の任意の整数倍を加え，または引いてもよいからである．すなわち n を正または負の整数または 0 とするとき

$$\operatorname{arc} z=\theta+2n\pi$$

である．ただし，$\operatorname{arc} z$ の cos. および sin. はもちろん一定である．

3.　極座標を用いるときは，複素数の乗法，除法が非常に明白に示される．いま

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

とすれば

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.\end{aligned}$$

ゆえに，複素数の積の絶対値は各因数の絶対値の積に等しく，積の偏角は各因数の偏角の和に等しい．すなわち

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\mathrm{arc}\, z_1z_2=\mathrm{arc}\, z_1+\mathrm{arc}\, z_2.$$

因数が二つより多くても同様である．もっとも，偏角の和は 2π の整数倍だけの違いを度外においていうのである．

これから除法に関する次の公式がただちに得られる．

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}.$$

すなわち

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{arc}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{arc}\, z_1-\mathrm{arc}\, z_2.$$

4.　乗法の公式から冪（べき）の公式がただちに出る．すなわち指数 n を正の整数とすれば，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad (z\neq 0)$$

のとき，

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \tag{1}$$

また，z^{-n} は z^n の逆数を表わすものとすれば，

$$z^{-n}=r^{-n}(\cos n\theta-i\sin n\theta).$$

これは乗法によって容易に験証することができる．ゆえに（1）は指数 n が負の整数のときにも成り立つのである．また $z^0=1$ とすれば，（1）は $n=0$ のときにもあてはまる．

上の公式によって複素数の開法の問題が容易に解決される．n を正の整数，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ は与えられた複素数とするとき，z の n 乗根を

$$Z=R(\cos\Theta+i\sin\Theta)$$

とおけば

$$Z^n=z,$$

すなわち $$R^n(\cos n\Theta+i\sin n\Theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

から $$R^n=r,$$
$$n\Theta=\theta+2k\pi. \quad (k \text{ は整数})$$

よって

$$R=\sqrt[n]{r},$$

もちろん $\sqrt[n]{r}$ は正の値を表わすのである.

また $$\Theta=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

この式で, k をいかなる整数としてもよいのであるが, それらの Θ の値に対して, n 乗根 Z の相異なる値が限りなく出て来るのではない.

k の二つの値 k_1, k_2 に対する Z の値が相等しくなるのは, それらに対する Θ の値の差 $2\pi\times\dfrac{k_1-k_2}{n}$ が 2π の整数倍で, すなわち k_1-k_2 が n で割り切れるときに限るから, Z のすべての相異なる値を得るには, k に 0, 1, 2,…, $n-1$ なる n 個の値を与えればよい.

ゆえに, 与えられた複素数 z の n 乗根は n 個の相異なる値をもつ. ただし $z=0$ は唯一の例外である.

上述のとおり, k に 0, 1, 2,…, $n-1$ なる値を与えることにすれば, それに対する Z の値は次のようである.

$$Z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$Z_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)=Z_0\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$Z_2=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{n}\right)=Z_0\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right),$$

……………………………………………………………………

$$Z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=Z_0\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

いま

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とおけば,

$$\omega^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

であるから，上の n 乗根は

$$Z_0,\ Z_0\omega,\ Z_0\omega^2, \cdots,\ Z_0\omega^{n-1}$$

になる.

さて　$\omega^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$,　したがって　$(\omega^k)^n=(\omega^n)^k=1$ であるから

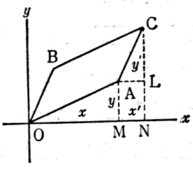
$$1,\ \omega,\ \omega^2, \cdots,\ \omega^{n-1}$$

はすなわち 1 の n 乗根である．すなわち z の n 乗根は，その一つの値 Z_0 に 1 の n 乗根を乗じて得られるのである.

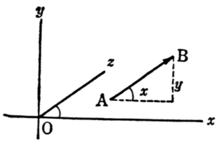
5.　二つの複素数　$z=x+yi$, $z'=x'+y'i$　と，その和である

$$w=z+z'=(x+x')+(y+y')i$$

とを複素数平面上において表わす点を，それぞれ A, B, C とすれば，C は OA, OB を二辺とする平行四辺形の第四の頂点である．次の図で　$OM=x$, $MA=y$.　また AC は OB と等長，同方向であるから，AC の実数軸および虚数軸上における正射影が x', y' に等しい．ゆえに，$MN=x'$, $LC=y'$．したがって $ON=x+x'$, $NC=y+y'$ で，C はちょうど w を表わす点になるのである.



右の作図が示すように，複素数を点 z で表わすよりも，むしろそれをベクトル $\overrightarrow{OA}$ で表わすのが得策である．更に一歩を進めて，ベクトルの起点は任意として，複素数 z をベクトル $\overrightarrow{AB}$ で表わすことにすれば，いっそうよい．すなわち $\overrightarrow{AB}$ の実数軸および虚数軸への正射影が x, y であるとき，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は複素数 $z=x+yi$ を表わすものとするのである．よってベクトルの長さが $|z|$ で，実数軸とベクトルの方向との間の角が arc z

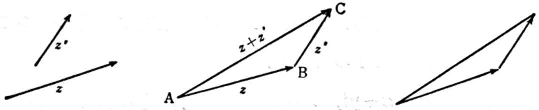


である．

特に，ベクトルの起点を複素数平面の原点 O におけば，ベクトルの終点がすなわちその複素数 z を表わす点になる．

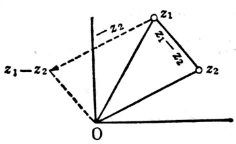
この規定によれば，複素数の加法は力学でいうベクトルの加法と同様になる．

二つのベクトルが相等しいというのは，その長さと方向とが相等しいことをいう．二つのベクトルの加法は，任意の点 A を起点として甲のベクトルに等しいベクトル $\overrightarrow{AB}$ を引いて，その終点 B を起点として乙のベクトルに等しいベクトル $\overrightarrow{BC}$ を引くのである．しからばベクトル $\overrightarrow{AC}$ が，これらの二つのベクトルの和である．起点 A をどこに取っても，和として出て来るベクトル $\overrightarrow{AC}$ は常に相等しいことは明白である



もしこれらのベクトルが，それぞれ複素数 z，z' を表わすならば，$z+z'$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ によって表わされるのである．

複素数 z_1，z_2 を点で表わすときは，差 z_1-z_2 は z_2 を起点，z_1 を終点とするベクトル $\overrightarrow{z_2z_1}$ で表わされる．それはベクトル $\overrightarrow{oz_2}$ と $\overrightarrow{z_2z_1}$ との和が $\overrightarrow{oz_1}$ に等しいからである．差 z_1-z_2 を表わす点は，O を起点として $\overrightarrow{z_2z_1}$ に等しいベクトルの終点である．すなわち z_1 を起点として $-z_2$ を表わすベクトルの終点である．

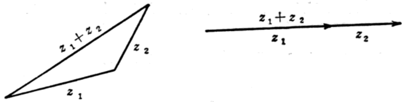


6. 複素数を表わすベクトルの長さが，その複素数の絶対値であることから，複素数の和の絶対値に関する次の定理は，幾何学的に考えて明白である．

$$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|. \qquad (2)$$

これは三角形の二辺の和が第三辺よりも大なることにほかならない．ただし

$\leqq$ のところに等号をおくのは z_1 と z_2 との偏角が相等しいときに限るのである.



三つ以上の複素数の和に関しても，同様である.

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|. \quad (3)$$

ここでも等号をおくべきときには

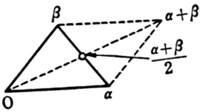
$$\operatorname{arc} z_1=\operatorname{arc} z_2=\cdots=\operatorname{arc} z_n.$$

$z_1=(z_1-z_2)+z_2$ であるから，(2) によって

$$|z_1-z_2| \geqq |z_1|-|z_2|.$$

$=$ のときは，$\operatorname{arc} z_1=\operatorname{arc} z_2$，かつ $|z_1| \geqq |z_2|$.

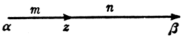
〔**問題 1**〕 複素数 α, β を表わす点を結ぶ線分の中点は複素数 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を表わす.



〔**問題 2**〕 m, n を正数とすれば

$$z=\frac{n\alpha+m\beta}{n+m}$$

は線分 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ を $m:n$ の比に内分する点である.



〔解〕 この関係を次のように書いて見れば明白である.

$$\frac{z-\alpha}{m}=\frac{\beta-z}{n}$$

〔注意〕 m, n のうち一つが正，一つが負ならば，z は線分 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ を $|m|:|n|$ の比に外分する. $|m| \lessgtr |n|$ に従って，z は $\overrightarrow{\alpha\beta}$ または $\overrightarrow{\beta\alpha}$ の延長の上にある.

〔**問題 3**〕 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ が正数ならば，

$$z=\frac{m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_k\alpha_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}$$

は点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ においてそれぞれ質量 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ をもつ質点の組合せ

の重心である.

〔解〕 $\alpha_1=x_1+y_1i, \cdots, \alpha_k=x_k+y_ki, z=x+yi$ とおけば

$$x=\frac{m_1x_1+\cdots+m_kx_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k},\quad y=\frac{m_1y_1+\cdots+m_ky_k}{m_1+\cdots+m_k}$$

〔注意〕 問題2は二つの点に関する特別の場合である.

また三角形 $\alpha\beta\gamma$ の重心は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

四角形 $\alpha\beta\gamma\delta$ の重心は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$. これは線分 $\overrightarrow{\alpha\beta}$ の中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ と線分 $\overrightarrow{\gamma\delta}$ の中点 $\dfrac{\gamma+\delta}{2}$ とを結ぶ線分の中点である.

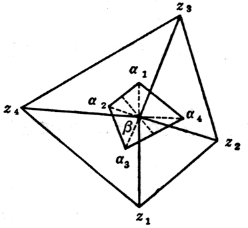
〔**問題 4**〕 四つの点の中の三つを頂点とする三角形が四つある. それらの三角形の重心の位置を知って, もとの四点を求めること.

〔解〕 これは初等幾何学の問題であるが, 複素数平面上においてそれを解くことができる. 虚数応用の一例である. 求める四つの点を表わす複素数を z_1, z_2, z_3, z_4; 与えられた重心を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする (ただし α_1 は三角形 $z_2z_3z_4$ の重心など). しからば

$$z_2+z_3+z_4=3\alpha_1,$$
$$z_1+z_3+z_4=3\alpha_2,$$
$$z_1+z_2+z_4=3\alpha_3,$$
$$z_1+z_2+z_3=3\alpha_4.$$

これを解いて

$$z_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-2\alpha_1$$
$$=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-3\alpha_1.$$



いま

$$4\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

とおけば

$$z_1=4\beta-3\alpha_1$$
$$=\beta+3(\beta-\alpha_1),$$

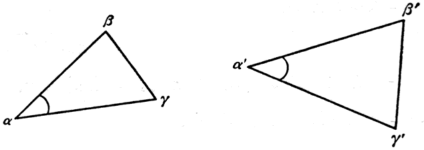
β はすなわち $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ の重心であるが, z_1 は β を起点として, $\overrightarrow{\beta\alpha_1}$ と反対の向きに, その3倍に等しい距離にある. z_2, z_3, z_4 も同様である.

7. 上の問題は複素数の加法のみに関係するもので, したがって幾何学的には, ベクトルの加法に帰するものであるから, まだ複素数の幾何学的表示法の特色を発揮していない. 次に乗法および除法に関係する二, 三の例をあげる.

〔**問題 5**〕 複素数 $\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma'$ の間に

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{\beta'-\alpha'}{\gamma'-\alpha'}$$

という関係があるとき，三角形 $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ は同じ向きに相似である．



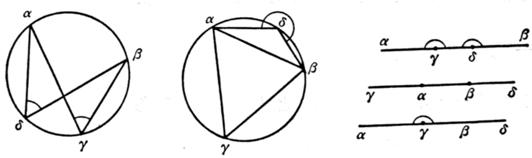
〔解〕 $\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ は $\overrightarrow{\alpha\beta}$, $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ によって表わされる二つの複素数の商であるから，その絶対値は長さの比 $\dfrac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\alpha\gamma}}$ に等しく，またその偏角は $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ から $\overrightarrow{\alpha\beta}$ への回転の角に等しい．右辺においても同様であるから，三角形 $\alpha\beta\gamma$ と $\alpha'\beta'\gamma'$ との二辺の比とその夾角とが，それぞれ相等しい．

〔**問題 6**〕 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が同一円周上（または同一直線上）にあるために必要かつ十分な条件は

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}=m$$

が実数であることである．

〔解〕 問題5のように，$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ と $\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ との偏角はそれぞれ $\angle\beta\gamma\alpha$, $\angle\beta\delta\alpha$ に等しいから，商 $m=\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$ の偏角は $\angle\beta\gamma\alpha-\angle\beta\delta\alpha$ に等しい．この差が0または π に等しいときに限って，商 m が実数になる．



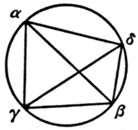
そのとき，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は一つの円周または一つの直線の上にある．二つの角の差が0すなわち $m>0$ のときは，γ, δ は円周上または直線上において α, β を隔離しないが，差が π すなわち $m<0$ のときは γ, δ は α, β を隔離する．

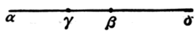
m の絶対値は四点相互の距離によって表わされる．すなわち $\dfrac{\overline{\alpha\gamma}\cdot\overline{\beta\delta}}{\overline{\alpha\delta}\cdot\overline{\beta\gamma}}$ である．m は同一円周上（または一直線上）の四点の非調和比である．

〔**問題 7**〕 α, β, γ, δ を平面上の四点とするとき，それらの点相互の距離の間に次の関係がある．

$$\overline{\alpha\gamma}\cdot\overline{\beta\delta}+\overline{\alpha\delta}\cdot\overline{\beta\gamma}\geqq\overline{\alpha\beta}\cdot\overline{\gamma\delta}.$$

等号 $=$ を取るのは，α, β と γ, δ とが同一円周または同一直線上において互いに隔離されるときに限る．





〔解〕 次の等式は容易に験証されるであろう．

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=0.$$

よって

$$(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)$$

したがって

$$|\alpha-\gamma||\delta-\beta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma|\geqq|\alpha-\beta||\delta-\gamma|$$

で，等号を取るべきは

$$\frac{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$$

が正数であるときに限る．すなわち

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}:\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$$

が負数であるときに限る．よって問題 6 から上の関係を得る．

§ 4.　一 次 整 函 数

1.　変数 z の一次の整函数を w とする．すなわち

$$w=\alpha z+\beta,\qquad(\alpha\neq0).$$

z が任意の複素数の値を取るとき，それに対応して w がある複素数の値を取る．z の値の変動するに伴って，w の値がどのように変動するかを考察するのが，われわれの問題である．

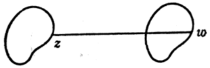
z と w との函数的の関係を見るには，幾何学的の表示によるのが便利である． z の値を表わす複素数平面を z 平面， w の値を表わす複素数平面を w

平面ということにすると，z 平面上の各点に，w 平面上のある点が対応し，したがって z 平面上の各図形には w 平面上のある図形が対応する．このような関係を**写像**という．z 平面上の図形を原形，それに対応する w 平面上の図形をその像と考えるのである．

まず $\alpha=1$，すなわち

$$w=z+\beta$$

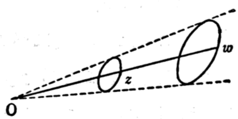
なる場合は，最も簡単である．この場合には，z と w とを同一の複素数平面上に表わせば，点 z を起点として β を表わすベクトルの終点がすなわち w であるから，z と w との関係は，いわゆる平行移動であって，z が描く図形と，それに対応して w が描く図形とは合同である．



次に $\beta=0$ で，かつ α が正数 r に等しいとき，すなわち

$$w=rz \qquad (r>0)$$

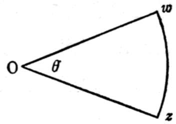
であるときには，w は常に直線 oz の上にあって，ow の長さは常に oz の長さの r 倍であるから，z の描く図形と，w の描く図形とは相似で，しかも O を中心として相似の位置にある．その相似の比は r に等しい．



また $\beta=0$ で $|\alpha|=1$ なるとき，

$$w=\alpha z, \qquad (\alpha=\cos\theta+i\sin\theta)$$

ならば，$|w|=|z|$，$\mathrm{arc}\, w=\mathrm{arc}\, z+\mathrm{arc}\,\alpha=\mathrm{arc}\, z+\theta$ であるから，z の描く図形を O を中心として角 θ だけ回転すれば，w の描く図形を得るのである．この場合には，z と w との相対応して描く図形は合同である．



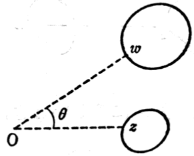
一般に $\beta=0$，すなわち

$$w=\alpha z$$

である場合には，

$$\frac{|w|}{|z|}=|\alpha|,\quad \operatorname{arc} w=\operatorname{arc} z+\operatorname{arc}\alpha$$

で，z の描く図形を O を中心として $|\alpha|$ 倍に変えて，同時にそれを arc α だけ回転すれば，w の描く図形が得られるのである．



すなわち $w=\alpha z$ は，O を中心とする回転伸縮の変形（Drehstreckung）である．

一般の場合

$$w=\alpha z+\beta \tag{1}$$

には，z から αz に移る変形を行なった後，更にベクトル β によって示される平行移動をすれば，z から w に達することができるから，この場合にも z と w とが相対応して描く図形は，同じ向きに相似で，かつその相似の比は $1:|\alpha|$ である．

z と w との相対応する値が同一複素数 ω であるとすれば，

$$\omega=\alpha\omega+\beta, \tag{2}$$

ゆえに，$\alpha=1$，（すなわち平行移動）の場合を除けば，

$$\omega=\frac{\beta}{1-\alpha}.$$

（1），（2）から　$$w-\omega=\alpha(z-\omega)$$

を得るから，（1）はつまり ω を中心とする回転伸縮の変形で，その相似の比は $1:|\alpha|$，回転の角は $\mathrm{arc}\ \alpha$ である．

逆に z と w との相対応する図形が常に同じ向きに相似であるとすれば，w は z の一次函数でなければならない．いま z と w との相対応する二組の値を z_1，w_1；z_2，w_2 とすれば，三角形 zz_1z_2 と ww_1w_2 とが同じ向きに相似であることから（§3，問題5参照）

$$\frac{w-w_1}{w_1-w_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}.$$

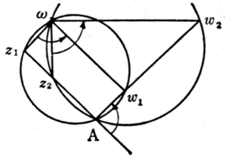
これを w に関する方程式として解けば

$$w=\alpha z+\beta$$

のような形の解を得る．ここで　$\alpha=\dfrac{w_1-w_2}{z_1-z_2}$.

相似の比は $\dfrac{\overline{w_1w_1}}{\overline{z_1z_2}}$ で，回転の角は $\overrightarrow{z_1z_2}$ から $\overrightarrow{w_1w_2}$ に至る角に等しくなければならないことからも，これは明白である．

〔**問題 1**〕 回転伸縮の中心を ω，z_1z_2 と w_1w_2 との交わりを A とすれば，ω は円 z_1w_1A と z_2w_2A との交わりである．



〔解〕 ωz_1 から ωw_1 への角も ωz_2 から ωw_2 への角もともに z_1z_2 から w_2w_1 への角に等しいから．

§ 5.　一次の有理函数 $w=\dfrac{1}{z}$・反転法および立体射影

1.　一次の有理函数を考察する前に，予備知識として幾何学で反転という写像ついて述べなければならない．

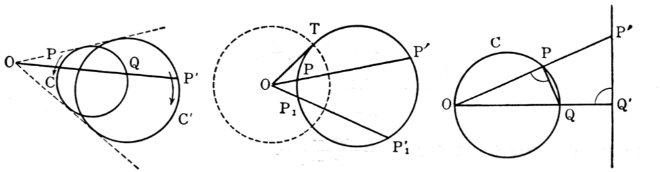
平面上の定点 O を中心とする半径 R の円を描いて，O から引いた任意の直線上に二点 P，P′ を取って，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=R^2$ とするとき，P と P′ とを，この円に関して互いに**反転**という．

この円を反転の定円，O を反転の中心，R を反転の半径という．

点 P がある図形を描くときは，それに対応して P′ がある図形を描く．それらの図形を互いに反転という．

〔**定理 1.1**〕 反転の中心を通らない円の反転は円で，反転の中心を通る円の反転は直線である．

〔証〕 反転の中心をO，CをOを通らない円周とし，Cの上の任意の点をP，Pの反転をP′とすれば，定義によってOPP′は一直線で，$OP \cdot OP' = R^2$．この直線が再びCに交わる点をQとすれば，OP·OQも一定であるから，OP′:OQは一定である．さてPが円周Cを描くときに，Qもまた円周Cを描く，したがってP′は一つの円周C′を描き，OがC，C′の相似の中心である．



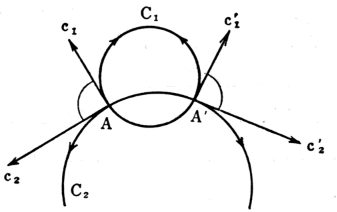
特に互いに反転である二つの点P，P′を通る任意の円周Cの反転は，その円周自身である。なぜならば，Oを通る任意の直線がこの円に交わる二つの点をP_1，P_1'とすれば $OP_1 \cdot OP_1' = OP \cdot OP' = R^2$ であるからである．またCが反転の定円に交わる点をTとすれば，Tの反転はT自身であるから $OT^2 = OP \cdot OP'$，したがってCは反転の定円に直交する．

円周CがOを通るとき，Oを通るCの直径の他の端をQ，Qの反転をQ′とすれば，Cの反転はQ′においてOQ′に垂直なる直線であることは見やすい．

反転の定義では，点Pが反転の中心Oと一致する場合が除かれているが，Pが限りなくOに近づくときには，P′は限りなくOを遠ざかるから，点Oの反転は∞であると考えるのが便利である．すなわち平面上に「∞なる一点」があるかのようにいうのである．また直線を半径の限りなく大きくなった円の極端の場合とみなして，∞を通る円周は直線であるというように考えると，上の定理を簡潔に「円の反転は円である」ということができて，かつOを通る直線の反転が，その直線自身であることまでが，包括されるのである．

〔**定理 1.2**〕 反転法において相対応する角は反対の向きに相等しい．

まず相対応する角の意味を説明する．点Aにおいて交わる曲線C_1，C_2の反転は，Aの反転A′において交わる曲線である，それらをC_1'，C_2'とする．AにおいてC_1，C_2に向きを付けるならば，それに応じてA′においてC_1'，C_2'に一定の向きが付く．Aにおいてそれらの向きにC_1，C_2の接線を



引くとき，それらの接線の間の角を C_1, C_2 の間の角というのである．A′ における C_1', C_2' の間の角も同様で，これらの角がすなわち反転において相対応する角である．相接する曲線の反転は，やはり相接する曲線で，曲線の間の角を考えるときには，それらの曲線を，それに接する任意の曲線でおき換えてもさしつかえない．

よって上の定理を証明するのに，A において二つの直線 Ac_1, Ac_2 が与えられてあるとして，それらに接する曲線 C_1, C_2 は随意に選んでよい．

いま A とその反転 A′ とを通り，かつ A においてそれぞれ Ac_1, Ac_2 に接する二つの円を C_1, C_2 とし，A′ においてそれらの円に接線 $A'c_1'$ $A'c_2'$ を各円周において Ac_1, Ac_2 と反対の向きに引けば，これらの円はそれ自身の反転であるから，問題は Ac_1, Ac_2 の間の角と $A'c_1'$, $A'c_2'$ との間の角とが反対の向きに相等しいということに帰する．それは，しかしながら明白である．

反転法は空間に拡張することができる．すなわち定点 O から引いた直線上に二点 P, P′ を取って $OP \cdot OP' = R^2$ ならしめるとき，P, P′ を互いに反転という．この場合に，球面の反転は一般に球面で，特に O を通る球面の反転は平面である．また直線の反転は，その直線と O とを含む平面上にあって O を通る一つの円周である．また円はそれを二つの球面の交わりと考えることができるから，その反転はこれらの球面の反転の交わりで，一般に一つの円である．

また相対応する角が等しいことも，上と同様にして互いに反転である点において交わる二つの円によって証明することができる．

2. 空間における反転を応用して，球面上の図形を平面上に写像して相対応する角を相等しくすることができる．これがいわゆる**立体射影**（stereographic projection）である．

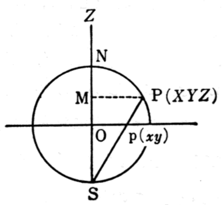
球面 K の上に反転の中心 O を取って，O を通る直径に垂直な平面 H を作り，反転の半径 R を適当に選べば，H が K の反転になる．O から球面上

の任意の点 P を通る直線を引いて，平面 H と P′ において交わらせると，P′ は P の反転である．P′ を P の立体射影という．P が球面上を動いて一つの図形 F を描くときは，P′ は平面 H の上において，それに対応する図形 F′ を描く．F′ が F の立体射影で，F，F′ において相対応する角は相等しい．特に円の射影は一般に円で，O を通る円に限って，その射影が直線になる．

〔**問題 1**〕 球 K の中心を通って平面 H を引き，中心を原点として平面上に直交軸 x，y を取り，立体射影の中心を z 軸の負の向きに取って，球面上の点とその射影との座標の間の関係を求めよう．座標の原点を O としたいから，射影の中心を S と名づけよう．球の半径を R とすれば，球面上の点 P の座標 X，Y，Z とその射影 p の坐標 x，y との間に次の関係がある．

$$x=\frac{RX}{R+Z},\quad y=\frac{RY}{R+Z}. \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{2R^2x}{x^2+y^2+R^2},\\ Y&=\frac{2R^2y}{x^2+y^2+R^2},\\ Z&=\frac{R(R^2-x^2-y^2)}{x^2+y^2+R^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



〔解〕 $\dfrac{x}{X}=\dfrac{y}{Y}=\dfrac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SM}}=\dfrac{R}{R+Z}$ から（1）を得る．

また $\dfrac{x}{X}=\dfrac{y}{Y}=\dfrac{R}{R+Z}=\dfrac{\mathrm{Sp}}{\mathrm{SP}}=\dfrac{\mathrm{Sp}^2}{\mathrm{Sp}\cdot\mathrm{SP}}=\dfrac{\mathrm{Op}^2+R^2}{\mathrm{SO}\cdot\mathrm{SN}}=\dfrac{x^2+y^2+R^2}{2R^2}$ から（2）を得る．

3. 以上幾何学に関する説明を終わって，複素変数 z の一次の有理函数に返り，まず簡単な特別の場合

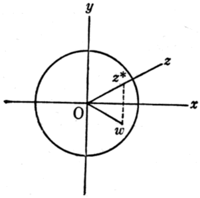
$$w=\frac{1}{z}$$

から始める．極座標を用いて

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とすれば，

$$w=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta).$$



w と共役な複素数は

$$\overline{w}=\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

であるから，Oを中心とする半径1の円（それを**単位円**という）を反転の定円とするとき，$\overline{w}$ は z の反転である．

よって z を反転して z^* を得るとき，実数軸に関して z^* と対称なる点を求めるならば，それがすなわち $w=\frac{1}{z}$ である．

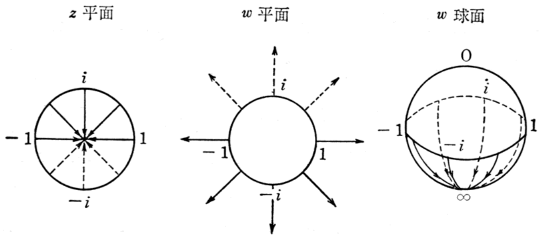
互いに対称な図形は反対の向きに合同であるから，$w=\frac{1}{z}$ による写像においては，円には円が対応し，相対応する角は同じ向きに相等しい．ただし円という中に特別の場合として直線を含めるのである．

z の値と w の値とは一般に一つずつ相対応するが，ただ $z=0$ と $w=0$ とが例外である．z が複素数平面上で限りなく 0 に近づくときには，z の絶対値は限りなく小さくなり，したがって w の絶対値は限りなく大きくなる．同様に，w が 0 に近づくときには，z の絶対値が限りなく大きくなる．よって複素変数の絶対値が限りなく大きくなるときには，偏角のいかんにかかわらず，その複素変数は ∞ になるということにして，$z=0$ には $w=\infty$ が対応し，また $w=0$ には $z=\infty$ が対応するといえば，言葉の上では，上の例外を除くことができる．

z が各方面から 0 と異なるある値 α に近づくときには，それに対応して w も各方面からある一定の値 β に近づく．β はすなわち$\frac{1}{\alpha}$である．ただzが各方面から 0 に近づくときには，w は各方向に限りなく離散する．それは事実であっていかんともすべからざるのであるが，ただその事実のいい表わし方である．限りなく離散することを，∞ に集合するというまでである．

この離散を化して実際上の集中とする手段がある．それは立体射影である．2. で述べたようにして，複素数平面を，原点を中心とする半径 1 の球面上に

投影すれば，球面上の各点と複素数平面上の各点 z との間に，一対一の対応が生ずるから，球面上の点によって複素数 z を表示することができる．ただ球面上における射影の中心 S に対応する点は複素数平面上にはない．けれども，複素数平面上において z の絶対値が限りなく増大するときは，z を表わす球面上の点は限りなく S に近づく．よって S は ∞ を表示するものと見れば，平面上における ∞ への離散が，球面上では特定の一点 S への集中として，表現されるのである．



〔**問題 2**〕 z が 0 において相接する円周を描くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ は平面上では互いに平行な直線を描くが，球面上では $w=\infty$ において相接する円周を描く．z が 0 と α とで交わる二つの円周を描くとき，w は平面上では $\dfrac{1}{\alpha}$ を通る二つの直線を描くから，その交点は $\dfrac{1}{\alpha}$ だけであるが，球面上では ∞ と $\dfrac{1}{\alpha}$ とにおいて相交わる二つの円周を描く．

〔**問題 3**〕 上の球面上の表示において複素数 $z=x+yi$ を表わす球面上の点の座標を $X,\ Y,\ Z$ とすれば

$$x+yi=\frac{X+Yi}{1+Z},$$

$$\left.\begin{aligned} X+Yi&=\frac{2z}{1+|z|^2}, \\ Z&=\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}. \end{aligned}\right\}$$

原点を通り，方向余弦が $l,\ m,\ n$ である直線が球面を切る点は $\omega=\dfrac{l+mi}{1+n}$

を表わし，その対極点は $\omega'=-\dfrac{l+mi}{1-n}$ を表わす．したがって $\overline{\omega}\omega'=-1$.

〔解〕 問題 1 (22頁)参照．ここでは $R=1$. また $l^2+m^2=1-n^2$.

§6. 一般の一次有理函数 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

1. 一次の有理函数の一般な形は

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

で，係数 α, β, γ, δ は任意の複素数である．ただし $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ と仮定する.* さもなければ w は定数（または無意味）になる．

$\gamma=0$ ならば，w は一次の整函数になる．その場合を除いて，$\gamma\neq 0$ とすれば

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2\left(z+\dfrac{\delta}{\gamma}\right)}$$

すなわち

$$w=\lambda+\mu w',\quad \lambda=\frac{\alpha}{\gamma},\quad \mu=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2},$$

$$w'=\frac{1}{z'},$$

$$z'=z-\nu,\qquad \nu=-\frac{\delta}{\gamma},$$

とおくことができる．このように w と z の間へ w', z' という二つの変数を入れて見れば，z' は z の一次整函数，w' は z' の逆数，w は w' の一次整函数で，いずれもすでに説明した場合になる．z が円を描けば，z' も円を描き，したがって w' も，また w も円を描くから，一般の一次有理函数による写像においても，円には円が対応するのである．また相対応する角が同じ向きに相等しいことも明白である．

z が円周 C を描くとき，w が円周 C′ を描くとする．このいい表わし方は粗雑であるが，z が円周 C の上を一周するときに，それに対応して w は

* 以下，本節で，いちいちことわらないで，この条件を仮定する．

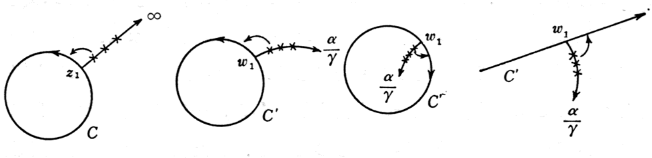
C′ の周上を一周する．一周というのは，円周上の一点から出発して回転の向きを変えずに出発点まで帰る意味である．このことは一次整函数および逆数の場合の証明を回想すれば容易にわかる．

さて，この一周には二つの向きがある．仮に時計の針と反対の向きを正の向きとすれば z が正の向きに C を一周するとき，w は C′ を正の向きに一周するか，または負の向きに一周するか，これら二つの場合の区別が重要である．この区別は，z 平面上 C の内部が w 平面上 C′ の内部に対応するか，外部に対応するかに関係する．C の周上の一点 z_1 から半径の延長線を引いて見る．z が z_1 からこの直線上を ∞ まで進行するとすれば，それに対応して w は C′ の周上で z_1 に対応する点 w_1 からある円弧の上を $z=\infty$ に対応する $w=\alpha/\gamma$ まで進行するであろう．しかもその間に再び円周 C′ を横切ることはない．その上に相対応する角が同じ向きに相等しいということがある．

そこで α/γ が円 C′ の外部にあるときには，w は C′ の上を正の向きに一周するが，α/γ が円 C′ の内部にあるならば，w は C′ の上を負の向きに一周する（次の図を参照）．

z から ∞ に至る直線の中途にある任意の z（すなわち円 C の外部にある任意の z）に対応する w に関しても同様で，その w が C′ の外部にあるか，または内部にあるかに従って，w が C′ の周上を一周する向きが正または負になるのである．

C または C′ が直線である場合も同様で，円の内部または外部というところが直線の一側または他側に代わるだけである．

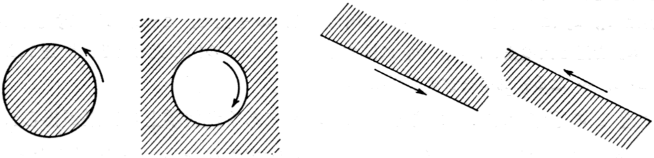


上の考察の結果を簡明にいい表わすには，円の内部，外部の差別から一歩を進めて，一つの円周を限界とする平面の両部分をいずれも**円板*** と名づけて，

* ドイツ語 Kreisscheibe ら直訳して，仮に円板という．板というのは物質を連想して，平面上の空なる部分から差別するのである．

その限界である円周上を進行するとき，形内を左手に見るような向きを正の向きとするのが適当である．

すなわち円板が円の内部ならば，時計の針と反対の向きが正で，円板が円の外部ならば，その反対が正の向きになる．また直線を円の特別の場合と見て，その直線の一側を円板とよぶならば，直線のその側を左手に見ながら進行する向きを正の向きとするのである．



このような規定を設けるならば，上の考察の結果が次のように簡明にいい表わされる．

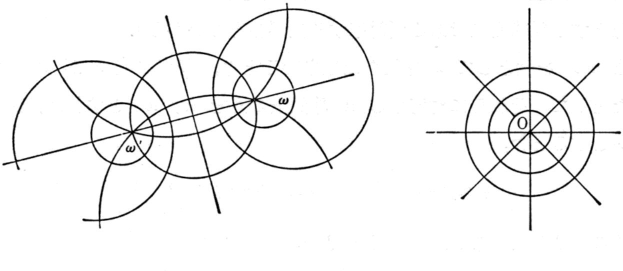
〔**定理 1.3**〕 **一次有理函数による写像においては，円板は円板に対応し，その限界線上の正の向きは正の向きに対応する．**

2. 一般の一次式において，分母分子を z の係数でくくれば

$$w=\kappa\frac{z-\omega}{z-\omega'}$$

の形になる．$\kappa=1$ のときは，特に簡明である．

〔**問題 1**〕 $w=\dfrac{z-\omega}{z-\omega'}$ による写像において，w 平面上 0 を中心とする円と，0 を通る直線とに対応する z 平面上の円を求めること．



〔解〕 w 平面上で 0 を中心とする半径 c の円周上では，$|w|=c$．
ゆえにそれに対応する z 平面上の円周の上では，

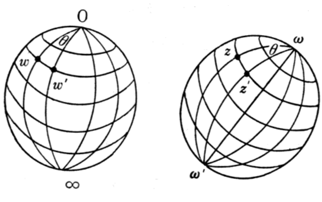
$$\frac{|z-\omega|}{|z-\omega'|}=c.$$

これは ω，ω' に関する Apollonius の円である．また $\mathrm{arc}\,w=\theta$ なる直線に対応する円周上では $\angle\omega' z\omega=\theta$．この円は ω，ω' を通って Apollonius の円と直交する．

〔注意〕 一般の場合において，z の二つの値 z_1，z_2 に，w の二つの値 w_1，w_2 が対応するとき，z 平面で，z_1，z_2 を通る円の束と，それに直交する円の束とを考察する．後者は z_1，z_2 に関する Apollonius の円である．w 平面で，これらに対応するものは，w_1，w_2 を通る円の束と，w_1，w_2 に関する Apollonius の円の束である．問題1は w_1，w_2 が 0，∞ なる特別の場合にすぎない．

問題 1 の写像を球面上で考察すれば，興味ある幾何学上の結果が得られる．

w 平面における 0 を通る直線は，球面上では 0 と ∞ とを通る大円周に対応し，0 を中心とする平面上の円は，球面上ではこれらの大円周に直交する円周になる．すなわちこれらの二組の円は ∞ と 0 とを両極とする経緯度線である．



$w=0$ および ∞ に対応する z の値 ω,ω' が z 球面上で一対の対極点である場合には，上の w 球面上の二組の円周に対応する z 球面上の曲線は ω，ω' を両極とする経緯度線である（対応する角が相等しいから）．

いま $\omega\omega'$ を軸として z 球面を回転させるとき，任意の点 z が z' の位置に来たとして，それらに対応する w 球面上の点を w，w' とすれば，回転の角を θ とするとき，

$$w'=\kappa w, \qquad \kappa=\cos\theta+i\sin\theta$$

であることは明白である．よって z と z' の間には

$$\frac{z'-\omega}{z'-\omega'}=\kappa\frac{z-\omega}{z-\omega'} \tag{1}$$

なる関係が成り立つ．ただし ω と ω' とは対極点であるから，$\bar{\omega}\omega'=-1$ (§5，問題 3)．

あるいは，また（1）において

$$\omega=\frac{l+mi}{1+n},\quad \omega'=-\frac{l+mi}{1-n},\quad \varepsilon=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$$

とおけば，

$$\bar{\varepsilon}\frac{z'(1+n)-(l+mi)}{z'(1-n)+(l+mi)}=\varepsilon\frac{z(1+n)-(l+mi)}{z(1-n)+(l+mi)}.$$

これを z' に関して解けば

$$z'=\frac{(d+ci)z+(b-ai)}{-(b+ai)z+(d-ci)} \tag{2}$$

を得る．ただし $a=l\sin\frac{\theta}{2}$, $b=m\sin\frac{\theta}{2}$, $c=n\sin\frac{\theta}{2}$, $d=\cos\frac{\theta}{2}$, $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

（2）は Cayley の公式である．

（2）を出すには $1-n^2=(l+mi)(l-mi)$ に注意することを要する．

このように，回転は複素数を用いて（1）または（2）によって簡明に表わされる．これを実数で表わせば，次の問題が解かれるであろう．

「空間における直交軸の原点を通る方向余弦 l, m, n なる直線を軸として角 θ だけの回転によって，点 X, Y, Z が X', Y', Z' の位置に来るとするとき，X', Y', Z' を X, Y, Z で表わすこと」．

これはつまり直交軸の変換であるから，X', Y', Z' は X, Y, Z の一次式として出て来なければならない．計算の結果は次のとおり．

$$\left.\begin{aligned}X'&=(a^2+d^2-b^2-c^2)X+2(ab-cd)Y+2(ac+bd)Z,\\ Y'&=2(ab+cd)X+(b^2+d^2-a^2-c^2)Y+2(bc-ad)Z,\\ Z'&=2(ac-bd)X+2(ad+bc)Y+(c^2+d^2-a^2-b^2)Z.\end{aligned}\right\}$$

実際計算するには，$(X, Y, Z)=(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ すなわち $z=1, i, 0$ に対応する z' を（2）から求めて，それらの z' に対応する (X', Y', Z') を §5，問題 3 の公式から求めるがよい．

3. 一次の有理函数

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

は係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の比が与えられたときにまったく確定する．ゆえに概括的にいえば，三つの条件を与えて，それらを満たす一次有理函数を求めることができる．特に円は三つの点によって定まるから，z 平面と w 平面とにおいて与えられた円を互いに対応させるような一次有理函数が求められるであろう．

〔**問題** 2〕 一次有理函数

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

において，z と w との相対応する四組の値を

$$z,\ w;\ z_1,\ w_1;\ z_2,\ w_2;\ z_3,\ w_3$$

とすれば

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

〔解〕 これは簡単な計算の問題である．

$$w_1-w_2=\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}-\frac{\alpha z_2+\beta}{\gamma z_2+\delta}$$

$$=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_1-z_2)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)}$$

などからすぐに出て来る．

〔注意〕 上の等式の両辺に出ている比を四つの数 $(w, w_1; w_2, w_3)$ または $(z, z_1; z_2, z_3)$ の**非調和比**という．よって上の定理は次のようにいい表わされる．

「非調和比は一次変形によって不変である」．

〔**問題** 3〕 相対応する三組の値

$$z_1,\ w_1;\ z_2,\ w_2;\ z_3,\ w_3$$

が与えられたとき，z の一次有理函数 w を求めること．

〔解〕

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

なることが必要条件である（問題 2）．これを w に関して解けば，w は z の一次の有理函数になる．さて上の関係式において $z=z_1,\ z_2,\ z_3$ とおけば，右辺はそれぞれ 1, 0, ∞ になる．ゆえに左辺も同様で，したがって $w=w_1,\ w_2,\ w_3$ になる．

〔注意〕 一次有理函数によって，z 平面の円に w 平面の円が対応することは，上の定理からも導かれる．すなわち z が z_1，z_2，z_3 を通る円を描くとき，右辺の非調和比は実数値をもつ．したがって左辺において w は w_1，w_2，w_3 を通る円周を描くのである（§ 3，問題 6）．

〔**問題 4**〕 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ によって，z 平面の円 C に，w 平面の円 C′ が対応するならば，C に関して互いに反転な二つの点には，C′ に関して互いに反転な二つの点が対応する．

〔解〕 z_1，z_2 を C に関して互いに反転とし，それらに対応する w 平面の二点を w_1，w_2 とする．z_1，z_2 を通る円 K は C に直交するから，それに対応する w_1，w_2 を通る円 K′ は C′ に直交する．このように互いに対応する円を二組作ったとすれば，w_1，w は C′ に直交する二つの円の交点である．したがって C′ に関して互いに反転である．

C′ が直線である場合には，w_1，w_2 は C′ に関して互いに対称である．

これによって，円に関する反転を，直線に関する対称の拡張とみなして，円に関する反転を対称ともよぶ．また円に関して互いに反転なる点を互いに鏡像ともいう．特に単位円に関する z の鏡像を z^* とすれば，$z^*=1/\bar{z}$，すなわち z^* は z の共役の逆数である．

〔**問題 5**〕 単位円をそれ自身に対応させる一次有理函数は

$$w=\frac{\alpha z-\beta}{\bar{\beta}z-\bar{\alpha}} \tag{1}$$

α，β は任意であるが，ただ $|\alpha|\neq|\beta|$ であることを要する．

〔解〕 $w=0$，∞ は単位円に関して互いに対称であるから，それらに対応する z の値も単位円に関して互いに対称でなければならない．ゆえに $w=0$ に $z=\mu$ が対応するとすれば（$|\mu|\neq1$），$w=\infty$ には μ の反転である $\dfrac{1}{\bar{\mu}}$ が対応する．したがって w の形は

$$w=\kappa\cdot\frac{z-\mu}{\bar{\mu}z-1}. \tag{2}$$

しかるに，$z=0$，∞ に対応する w の値すなわち $\kappa\mu$ と $\dfrac{\kappa}{\bar{\mu}}$ とも互いに反転でなければならないから

$$\bar{\kappa}\bar{\mu}\cdot\frac{\kappa}{\bar{\mu}}=1.$$

したがって

$$|\kappa|=1.$$

よって $\kappa=\dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}$ とおくことができる．いま $\alpha\mu=\beta$ と書けば，（2）が上の（1）の形に

なる．ただし $|\mu|\neq 1$ であるから $|\alpha|\neq|\beta|$.

$w=0$ に $z=\infty$ が対応する場合は(2)には洩れているが，この場合には $w=\frac{\kappa}{z}$, $|\kappa|=1$ で，すなわち（1）において $\alpha=0$ である場合である．

逆に（1）が実際単位円を単位円に対応させることは，$|z|=1$ であるとき

$$w\bar{w}=\frac{\alpha z-\beta}{\bar{\beta}z-\bar{\alpha}}\cdot\frac{\bar{\alpha}\bar{z}-\bar{\beta}}{\beta\bar{z}-\alpha}=\frac{\alpha z-\beta}{\bar{\beta}z-\bar{\alpha}}\cdot\frac{\bar{\alpha}-z\bar{\beta}}{\beta-\alpha z}=1$$

からわかる．

z 平面の単位円の内部が w 平面の単位円の内部に対応するか，または外部に対応するかは，$z=0$ に対応する w の絶対値が 1 よりも小であるか，または大であるかによる．すなわち $|\beta|\lessgtr|\alpha|$,（2）ならば，$|\mu|\lessgtr 1$ による．

〔問題 6〕 z 平面の実数軸を w 平面の単位円に対応させる一次有理函数の一般の形は

$$w=\kappa\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}},\qquad |\kappa|=1.$$

〔解〕 $w=0,\ \infty$ に対応する z の値は実数軸に関して互いに対称すなわち共役複素数でなければならないから，w の形は上のとおりである．また $z=\infty$ に対応する $w=\kappa$ は単位円の上にあることを要するから $|\kappa|=1$.

ゆえに，$\kappa=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$ とおくことができる．そこで $\alpha\mu=-\beta$ とおけば，

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\alpha}z+\bar{\beta}}$$

ここで z を実数とすれば，分母分子は互いに共役，したがって $|w|=1$.

4. 一般に z は z' の一次有理函数，z' は z'' の一次有理函数であるとすれば，z は z'' の一次有理函数である．いま

$$z=\frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta},\qquad (1)$$

$$z'=\frac{\alpha' z''+\beta'}{\gamma' z''+\delta'}\qquad (2)$$

とすれば，第一式の z' に第二式から代入して

$$z=\frac{(\alpha\alpha'+\beta\gamma')z''+(\alpha\beta'+\beta\delta')}{(\gamma\alpha'+\delta\gamma')z''+(\gamma\beta'+\delta\delta')}\qquad (3)$$

を得る．z' 平面から z 平面への写像（1）を S という文字で表わし，z'' 平面から z' 平面への写像（2）を S' という文字で表わすとき，（3）は z'' 平面から z 平面への写像を表わす．これを S, S' という二つの写像から合成さ

れたものといい，それを表わすのに SS' という記号を用いる．これは群論の記法である．この記法では文字の順序に注意しなければならない．SS' と $S'S$ とは意味が違う．

（1），（2），（3）における函数的関係を上と同じ文字で表わすならば

$$z=S(z'),\quad z'=S'(z'')\quad \text{したがって}\quad z=S\{S'(z'')\}$$

で，この最後の記号の括弧を略して

$$z=SS'(z'')$$

とすれば，上の群論上の記法と一致する．

（1），（2）のような関係式で重要なのは，その係数であって，z，z'，z'' などの文字はただ変数が三つあることを示すだけである．よって係数のみを標記して

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\qquad S'=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$$

とする．しからば

$$SS'=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma' & \alpha\beta'+\beta\delta'\\ \gamma\alpha'+\delta\gamma' & \gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix}. \tag{3*}$$

また（1）を z' に関して解けば，z' が z の一次有理函数として表わされる．すなわち

$$z'=\frac{\delta z-\beta}{-\gamma z+\alpha}.$$

これは上の z' から z への写像 S の逆である．これを S^{-1} としるすならば，

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}. \tag{4}$$

上のことを念頭において再び問題6を考察して見るならば，その解決が明らかになるであろう．

いま $z'=S(z)$ を z 平面と z' 平面との実数軸を互いに対応させる任意の一次有理函数とし，また $w=T(z')$ は z' 平面の実数軸を w 平面の単位円に対応させるある一つの特定の一次有理函数とする．しからば $w=TS(z)$ は z 平面の実数軸を w 平面の単位円に対応させるであろう．実際 z が実数ならば $S(z)$ は実数，したがって $T\{S(z)\}$ は単位円周上になければならないのであ

る．

逆に $w=S'(z)$ を z 平面の実数軸を w 平面の単位円に対応させる任意の一次有理函数とすれば，$z'=T^{-1}S'(z)$ によって z 平面と z' 平面との実数軸が互いに対応するであろう．実際 z が実数値を取るとき，$S'(z)$ は単位円周上にあるから，$T^{-1}\{S'(z)\}$ は実数軸上にあるのである．よって

$$T^{-1}\{S'(z)\}=S(z)$$

とおいてさしつかえない．したがって

$$S'(z)=T\{S(z)\}.$$

ゆえに S' を求めることは TS を求めることに帰する．

さて，問題 7 によって実数軸を実数軸に対応させる S の一般の形は，明らかに

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数.}$$

また

$$w=\frac{z'+i}{z'-i}$$

とすれば，明らかに z' の実数値に $|w|=1$ なる値が対応するから，

$$T=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

とすることができる．ゆえに (3*) によって

$$TS=\begin{pmatrix} a+ci & b+di \\ a-ci & b-di \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

$\alpha=a+ci$, $\beta=b+di$ とおいたのである．これは問題 6 で求めた一般の一次有理函数の形である．

なお，ついでながら問題 5 を考察する．

S, T の意味は上のとおりとすれば，z が単位円周上にあるとき，$T^{-1}(z)$ は実数，したがって $ST^{-1}(z)$ も実数，したがって $TST^{-1}(z)$ は単位円周上にある．ゆえに TST^{-1} なる結合によって問題 5 の解が得られる．この結合を実行するに，TS は上のとおりであるから，それに (4) から得られる

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

を結合して

$$TST^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\alpha} & \bar{\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & i\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha i+\beta & \alpha i-\beta\\ \bar{\alpha}i+\bar{\beta} & \bar{\alpha}i-\bar{\beta}\end{pmatrix}$$

$\alpha i+\beta=\lambda$　とすれば　$\bar{\alpha}i-\bar{\beta}=-\bar{\lambda}$,

$\alpha i-\beta=-\mu$　とすれば　$\bar{\alpha}i+\bar{\beta}=\bar{\mu}$.

よって

$$TST^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ \bar{\mu} & -\bar{\lambda}\end{pmatrix}.$$

これは問題 5 の公式と記号が違うだけである.

5.　一次函数による写像において, 円に円が対応することと, 相対応する角の相等しいこととが, 本節の問題の骨髄であるが, 一次函数のこれら二つの性質が, あまりに混み入って説明されたのであった. 円に円が対応することは一次函数の特性であるけれども, 相対応する角が相等しいことは一次函数特有の性質ではないのである.

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

において, z' に w' が対応するとすれば

$$w'=\frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}.$$

したがって

$$w-w'=(z-z')\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma z+\delta)(\gamma z'+\delta)}$$

$$\frac{w-w'}{z-z'}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma z+\delta)(\gamma z'+\delta)}.$$

いま z' が限りなく z に近づくものとすれば, 極限において

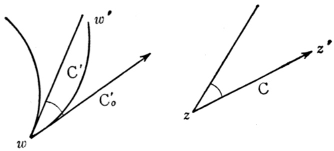
$$\operatorname*{Lim}_{z'\to z}\frac{w-w'}{z-z'}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma z+\delta)^2}.$$

この右辺を κ とおけば

$$\operatorname*{Lim}_{z'\to z}\frac{w-w'}{z-z'}=\kappa$$

で, z' がどのような向きから z に近づくとしても, κ は一定である.

すなわち arc$(w-w')$ と arc$(z-z')$ との差は，極限において，一定の値 arc κ をもつのである．



いま z' が直線 C の上で限りなく z に近づくと考えるならば，w' はそれに対応する円周 C′ の上で限りなく w に近づき，ベクトル $\overline{ww'}$ の向きは限りなく w における接線 C_0' の向きに近づく．ゆえに C_0' が実数軸となす角と C が実数軸となす角との差は arc κ に等しい．この差は C の方向のいかんにかかわらず一定であるから，z，w において相対応する角が同じ向きに相等しいのである．

このように考えると，相対応する角の相等しいことは

$$\lim_{z'\to z}\frac{w-w'}{z-z'}$$

が一定の値をもつことからの帰結である．この極限は実数の場合における微分商に該当するものであるから，それを $\dfrac{dw}{dz}$ としるすが，実数の場合には，z' が z に近づく向きは左右両方に限るのに反して，変数が複素数であるときは，z' は各方面から z に近づき得るにもかかわらず，一定の極限が存在するのである．

このように一定の微分商が存在する場合には，上の証明がそのまま当てはまるから，相対応する角は同じ向きに相等しいのである．ただし微分商 κ が 0 に等しいときは例外である．その場合には arc κ は不定であるから，上の証明を適用することができない．

付 記

この所で現代の数学における複素数の位置に関して解説を試みようと思う．負数の平方根が実数中に存在しないことから生ずる不便を除くために，複素数を導入して数の範囲を拡張したのであるが，複素数の範囲内では，四則に関する計算の原則が実数の場合そのままの形で保存されると同時に，負数の開平のみでなく，任意の複素数の開法が例

外なく可能である．それのみではない，開法は方程式 $x^n-\alpha=0$ の解であるが，一般に複素数を係数とする任意の方程式 $f(x)=0$ の解が複素数の範囲内で可能である．この定理は代数学の基本定理といわれるもので，次の章においてその証明を述べるであろうが，これによって見れば，方程式の解法を主要の問題とする代数学においては，複素数の全範囲を考察の対象とすべきことは当然である．

Gauss は 1799 年にその学士論文で代数学の基本定理の証明を発表した後，整数論の問題に複素数を適用して偉大な成功をもたらし，次いで Cauchy は函数論を複素変数の上に築いて，18 世紀の微積分法にまつわった多くの疑問に光明を与え，Abel および Jacobi の楕円函数の発見を可能にする素地を作った．また射影幾何学の発達は，幾何学においても，虚数的原素を導入することの避くべからざることを示した．いずれの方面においても，実数は数学の対象としては不自然に偏狭で，複素数の範囲においてのみ，数学の諧調的，統一的の発達が可能であることが認められて，今日の数学は複素数の数学となったのである．

このようにして，19 世紀の中頃に至って，虚数が一般数学界において承認された後に 1，i を原素とする二次元の複素数の範囲を更に拡張して多次元の複素数を数学に導入することが問題となった．Hamilton の四元法（quaternions）や，Grassmann の広延論（Ausdehnungslehre）がその最初の試みで，今日では，このような高次元の複素数を高級複素数という．しかるに，ここに最も注意すべき事実は，これらの高級複素数においては，四則に関する原則を全部保存することが不可能であるということである．四則に関する原則は § 1，(1)～(9) に掲げた加法および乗法に関する交換，結合，分配の法則と減法および除法の一意性とである．除法の一意性から，積が 0 であるとき，因数のあるものが必ず 0 である，という法則 (10) が生ずる．いま，なるべくこれらの原則を敬重して，数の範囲を拡張しようとすると，加法，減法のみに関しては問題は簡単であるが，乗法，除法に関しては結合，分配の法則を犯さないとすれば，交換の法則と除法の一意性とのうち，どちらかを犠牲にすることを避けることができない．交換の法則が成り立たないとすれば，数学は随分面倒になるが，除法の一意性が失われるならば，混雑は更にはなはだしい．0 でないものを掛け合わせて 0 が出るようでは迷惑至極である．

この事実は数学における複素数（われわれの複素数，$x+yi$）の位置を明示する．実数だけでは数の範囲は狭きに失するが，だからといって高級複素数までを入れては数学はむずかしくなる．近頃，代数という語を複数にして algebras という．それは種々の高級複素数の代数があり得ることが，あたかも異なる公理の上に種々の幾何学が成り立ち得るのと同様であるからである．そうすれば，種々の幾何学の中での Euclid の幾何学と同様に，種々の代数学の中で $x+yi$ の代数学が一番手頃で，したがって一番役立つということになる．

上のように四則の原則を全部保存するとすれば，数の範囲は通常の複素数の外に出ることができないということは，比較的簡単に証明することができるから，参考として迅

速にその大要を述べることにする．

実数単位 1 のほかに新単位 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \cdots, \mathbf{k}$ を用いて，実数 $a, b, c, \cdots, d$ を係数として，

$$z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + \cdots + d\mathbf{k},$$

のような式を一つの数という．このような数の四則が上の原則を全部保存して定められたと仮定する．そうすれば，

$$z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + \cdots + d\mathbf{k},$$
$$z^2 = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + \cdots + d'\mathbf{k},$$
$$z^3 = a'' + b''\mathbf{i} + c''\mathbf{j} + \cdots + d''\mathbf{k},$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

のような等式が生ずるから，実数 c_1，$c_2, \cdots, c_n$ を適当に定めるならば，

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{1}$$

のような関係が生ずる（連立一次方程式の解法，参照）．

さて，代数学の基本定理によれば

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

のような実係数をもつ多項式は，一次の実因数 $x-a$ または二次の実因数 x^2+mx+n の積に分解される．ただしこの二次因数に関しては $x^2+mx+n=0$ は実根をもたないものとするのである．さて，いわゆる新しい数 z は実数と同様の四則の法則に従うという仮定であるから，実数に関して

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = (x-a) \cdots (x^2+mx+n) \cdots$$

のような恒等式が成り立つならば，必ず

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = (z-a) \cdots (z^2+mz+n) \cdots$$

なる関係が成り立たねばならない．しかるに（1）によって，この等式の左辺は 0 に等しく，そして積が 0 に等しいときには，因数の中に 0 に等しいものがあるという仮定であるから

$$z = a \quad \text{または} \quad z^2 + mz + n = 0$$

すなわち z は実数でないならば，虚根もつ二次方程式を満足しなければならない．

さて

$$x^2 + mx + n = (x-h)^2 + k^2 \qquad (h,\ k \text{ は実数 } k \neq 0)$$

のような恒等式が成り立つから，上述のように

$$z^2 + mz + n = (z-h)^2 + k^2 = 0,$$

ゆえに

$$z = h + k\mathbf{J}$$

とおけば，

$$\mathbf{J}^2 = -1. \tag{2}$$

ゆえに $\mathbf{J}$ は i または $-i$ に等しく，したがって z は $h+ki$ または $h-ki$ に等しい．等しいというのは記号の違いを度外においていうのである．すなわち四則の計算に関し

ては $\mathbf{J}$ も i または $-i$ もまったく同様の動作をするのをいうのである．z は新しい数であるといっても，それは $h\pm ki$ が記号だけを変えて新しい数と名乗って出て来たのにすぎない．さて（2）のような数は $\pm\mathbf{J}$ のほかにはない．実際 $\mathbf{J}'^2=-1$ とすれば，$\mathbf{J}'^2-\mathbf{J}^2=0$，すなわち $(\mathbf{J}'-\mathbf{J})(\mathbf{J}'+\mathbf{J})=0$．ゆえに $\mathbf{J}'-\mathbf{J}=0$ または $\mathbf{J}'+\mathbf{J}=0$，すなわち $\mathbf{J}'=\pm\mathbf{J}$．よって z' を新範囲における任意の数とするとき，z' が実数でないならば，$h'+k'\mathbf{J}$ のような形であって，新範囲といっても，それは内容において，われわれの複素数とまったく同一である．

第2章　方程式論の基本定理

§7.　多項式の四則

1.　一つの変数に関する多項式とは

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n$$

のような式をいう．ここで a_0，a_1，a_2，…，a_n は一定の数を表わすもので，いわゆる定数である．それらを総称して（a_n をも入れて）多項式の係数という．また z には種々の数値を与える下心があるのだから，それを変数という．すなわち多項式はこの変数 z の函数である．それを示すためには，函数記号を用いて多項式を $f(z)$ などとしるす．多項式を z の函数と見るときには，それを有理整函数という．

多項式における係数も変数も複素数とするけれども，実数の場合に成り立つところの，多項式の四則に関する公式（恒等式）は，そのまま適用されるのである．

たとえば二項式定理

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k$$

などは，a，x が複素数であっても成り立つ．

本書では，**二項係数**を $\binom{n}{k}$ で表わす．それを ${}_nC_k$ などとしるせば，肝心の n や k が目立たないのを嫌うからである．すなわち

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k\,!},\qquad ただし\ \binom{n}{0}=1.$$

このような恒等式はつまり §1 に掲げた（1）〜（9）の原則のみによって証明できるものであるから，たとえ文字が実数を表わすものとして導き出されたものでも，文字が複素数を表わす場合にも，そのまま成り立つのである．ただし数量的の仮定（大小の関係）を根拠とするものはこの限りでない．たとえば a，b が実数ならば，$a^2+b^2=0$ から $a=0$，$b=0$ を得るが，複素数の場合には，それが許されないことはもちろんである（$i^2+1^2=0$ から，$1=0$，$i=0$ は出て来ない！）．

2. 多項式の四則の理論を系統的に述べることは留保して，ここでは多項式の Taylor 展開を説明する．

n 次の多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n$$

において，x に $x+h$ を代入すれば

$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots+a_k(x+h)^k+\cdots+a_n(x+h)^n.$$

各項を二項式定理によって展開すれば，

$$\begin{aligned}f(x+h)=a_0&\\ &+a_1x+a_1h\\ &+a_2x^2+2a_2xh+a_2h^2\\ &+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+a_nx^n+\binom{n}{1}a_nx^{n-1}h+\binom{n}{2}a_nx^{n-2}h^2+\cdots+a_nh^n.\end{aligned}$$

これを h の昇冪に排列すれば，h の各冪の係数は x の多項式になるが，特に h を含まない項はすなわち $f(x)$ に等しい．いま h^k の係数を

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

としるして

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n \quad (1)$$

とおけば，

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n,\\ f'(x)&=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+ka_kx^{k-1}+\cdots+na_nx^{n-1},\\ f''(x)&=2a_2+6a_3x+\cdots+k(k-1)a_kx^{k-2}+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2},\cdots\\ f^{(k)}(x)&=1.2.\cdots ka_k+2.3.\cdots(k+1)a_{k+1}x+\cdots+(n-k+1)\cdots na_nx^{n-k},\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f^{(n)}(x)&=1.2.\cdots na_n\end{aligned}$$

で，$f(x)$ から $f'(x)$ を作るのと同様の操作で，$f'(x)$ から $f''(x)$ を得，$f''(x)$ から $f'''(x)$ を得る．以下同様である．

$f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$ を $f(x)$ の第一，第二…導函数という．

これらは微分法で用いられる記号および術語であるが，多項式の場合には，微分によらないで，導函数を導き出すことができるのである．

（1）において，x に α を代入し，h に $x-\alpha$ を代入すれば，次のようになる．

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n. \tag{2}$$

すなわち $f(x)$ が $x-\alpha$ に関する多項式として表わされる．これが $x-\alpha$ に関する $f(x)$ の Taylor 展開である．

3．公式（2）は微分法への連絡のために，あのような形に導いたのであるが，多項式 $f(z)$ を $z-\alpha$ の昇冪に展開することは，割り算でできる．すなわち，$f(z)$ を $z-\alpha$ で割って，商を $f_1(z)$，剰余を A とすれば，

$$f(z)=A+(z-\alpha)f_1(z).$$

$f_1(z)$ を $z-\alpha$ で割って，商を $f_2(z)$，剰余を B とすれば，

$$f_1(z)=B+(z-\alpha)f_2(z).$$

それを上の等式に代入して，

$$f(z)=A+B(z-\alpha)+(z-\alpha)^2f_2(z).$$

$f(z)$，$f_1(z)$，$f_2(z)$，…の次数は一つずつ低くなるから，$f(z)$ を n 次とすれば，このような操作を続行して

$$f(z)=A+B(z-\alpha)+C(z-\alpha)^2+\cdots+L(z-\alpha)^n$$

を得る．係数 $A, B, \cdots, L$ が（2）において次のようにしるされてあるのである．

$$A=f(\alpha),\quad B=\frac{f'(\alpha)}{1!},\quad C=\frac{f''(\alpha)}{2!},\quad \cdots,\quad L=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

いま

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

とおけば，$f(z)$ を $z-\alpha$ で割るとき，商 $f_1(z)=q_0z^{n-1}+q_1z^{n-2}+\cdots+q_{n-1}$ の係数と，剰余 $A=f(\alpha)$ とは次のようにして計算することができる．

$$q_0=a_0,\quad q_1=q_0\alpha+a_1,\quad q_2=q_1\alpha+a_2,\cdots,q_{n-1}=q_{n-2}\alpha+a_{n-1},\quad A=q_{n-1}\alpha+a_n.$$

実際，$(z-\alpha)f_1(z)=q_0z^n+(q_1-q_0\alpha)z^{n-1}+(q_2-q_1\alpha)z^{n-2}+\cdots+(q_{n-1}-q_{n-2}\alpha)z-q_{n-1}\alpha$

であるから，上のとおりで，ちょうど

$$f(z)=(z-\alpha)f_1(z)+A$$

になる．

ゆえに実際の計算において，$q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$ と A とを求めるには，次のように演算をすることができる．

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
+ & & q_0\alpha & q_1\alpha & \cdots & \cdots & \cdots & q_{n-2}\alpha & q_{n-1}\alpha \\
\hline
 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & \cdots & \cdots & q_{n-1} & A
\end{array}$$

すなわち $f(z)$ の係数を降冪順に並べて第一行にしるし，まず $q_0=a_0$ とする．次に $q_0\alpha$ を a_1 の下にしるし，加えて q_1 を得る．次に $q_1\alpha$ を a_2 の下にしるし，加えて q_2 を得る．このようにして最後に得るのが剰余 A である．

$q_0, q_1, q_2\cdots, q_{n-1}$ に同様の操作を行なえば $f_2(z)$ の係数と最後に B とを得る．このような演算で次々に $A, B, \cdots, L$ が求められる．いわゆる Horner 式の計算法である．

〔例〕 $f(x)=3x^4-17x^3+30x^2-17x+6$ を $x-2$ の冪に展開すること．

$$\begin{array}{l|l}
3-17+30-17+6 & \\
\quad+\ 6-22+16-2 & \\
\hline
3-11+\ 8-\ 1 & +4=f(2) \\
\quad+\ 6-10-\ 4 & \\
\hline
3-\ 5-\ 2 & -5=f'(2) \\
\quad+\ 6+\ 2 & \\
\hline
3+\ 1 & 0=\dfrac{f''(2)}{2} \\
\quad+\ 6 & \\
\hline
3 & +7=\dfrac{f'''(2)}{6} \qquad 3=\dfrac{f^{\mathrm{IV}}}{24}.
\end{array}$$

$$f(x)=4-5(x-2)+7(x-2)^3+3(x-2)^4.$$

4.　多項式 $f(x)$ が，$x=\alpha$ なる値を与えるときに 0 になるならば，すなわち $f(\alpha)=0$ ならば，$x=\alpha$ はすなわち方程式 $f(x)=0$ の根である．または略して α を多項式 $f(x)$ の根ともいう．この場合には，(2)から見えるように，$f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．

一次以上の多項式は必ず根をもつ．これはいわゆる代数学の基本定理であるが，いま仮にこれを承認して，α を n 次の多項式

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+l \qquad (a\neq 0)$$

の根とし，

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$$

とおけば，$f_1(x)=ax^{n-1}+\cdots$ は $n-1$ 次の多項式である．いま β を $f_1(x)$

の根として

$$f_1(x)=(x-\beta)f_2(x), \qquad f_2(x)=ax^{n-2}+\cdots$$

とおけば，上の等式に代入して

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)f_2(x).$$

このような操作を続行して，ついに

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)$$

のように，$f(x)$ が n 個の一次因数の積に分解される．

次に（§ 9）代数学の基本定理を証明するから，上のような因数分解の可能であることが確定するが，結果をここに掲出して目標を示しておくのである．

§ 8.　多項式の連続性

1.　前節では多項式四則の形式的の側面を主として述べたのであるが，いま代数学の基本定理を証明するに当って，函数としての多項式の二，三の性質を考察することが必要である．まず次の定理から始める．

〔**定理 2.1**〕　多項式 $f(z)$ は z の連続函数である．

〔解説〕　定理の意味は次のとおり．変数 z が複素数平面上において変動するとき，それに伴って $f(z)$ も変動するが，z の変動の範囲を十分に狭く制限することによって，$f(z)$ の変動をいくらでも小さい予定の範囲内に止まらせることができる．式に書けば，δ を任意に与えられた正数とするとき，それに対応して適当に正数 ε を定めて

$$|h|<\varepsilon \text{ なるとき } |f(z+h)-f(z)|<\delta \tag{1}$$

とすることができる．

〔**証**〕　$f(z)$ を n 次の多項式とすれば，

$$f(z+h)=f(z)+Bh+Ch^2+\cdots+Lh^n \tag{2}$$

で，B, C, $\cdots$, L は z の多項式で，h に関係しない．よって z に一定の値を与えるならば，B, C, $\cdots$, L の値も一定である．それらの絶対値のうち最大のものを M とする．

また $|h|<1$ とすれば

$$\begin{aligned}|f(z+h)-f(z)|&=|Bh+Ch^2+\cdots+Lh^n|\\&\leqq|Bh|+|Ch^2|+\cdots+|Lh^n|\end{aligned}$$

$$<M|h|+M|h|+\cdots+M|h|=nM|h|.$$

ゆえに δ が任意に与えられた正数であるとき，

$$|f(x+h)-f(z)|<\delta$$

とするには，

$$nM|h|<\delta,$$

すなわち

$$|h|<\frac{\delta}{nM} \tag{3}$$

とすれば，大丈夫である．

$|h|$ に課した条件は，これと $|h|<1$ とであるから，1 よりも， また $\frac{\delta}{nM}$ よりも，小さい数を ε とすれば，（1）で要求されているように，

$$|h|<\varepsilon \text{ のとき } |f(z+h)-f(z)|<\delta$$

になる（証終り）．

上の（1）は h が限りなく 0 に近くなるときに，$f(z+h)$ は限りなく $f(z)$ に近くなることを示すものであるから，それを次のようにしるせば，印象が鮮明である．

$$h\to 0 \quad \text{のとき} \quad f(z+h)\to f(z).$$

ついでながら，上の（2）から

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=B+Ch+\cdots+Lh^{n-1}$$

を得る．右辺に上の定理を適用すれば，

$$h\to 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\to B.$$

B はすなわち $f'(z)$ であるから

$$h\to 0 \text{ のとき } \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\to f'(z).$$

または $z+h=z'$ とすれば

$$\lim_{z'\to z}\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}=f'(z),$$

すなわち § 7 で計算によって導いた $f'(z)$ は $f(z)$ の微分商である．

ただし，ここでは z, z' は複素数である．複素数平面上において z' がどの方面から z に近づいても，

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

は一定の極限 $f'(z)$ に近づくのである（§ 6.6）．

なおつけ加えて述べておくべきことは，多項式の連続の一様性である．上の証明では，z が一定の値をもつものと仮定して，与えられた δ に対して（1）を満足させる ε を求めたのである．ε は（3）によって定めればよいのであったけれども，（3）における M は z の値に伴って変わるものである．しかるに，いま z は与えられた有限の範囲 C の中にあるとするならば，z の絶対値はある一定の限界以内に止まるから，$|z|<R$ とおくことができる．R はある一定の正数である．さて（2）における B, C, …, L は z の多項式であるから，$|z|<R$ である限り，$|B|<M$, $|C|<M$, …, $|L|<M$ になるような一定のある値 M を求めることができる．

そのためには，z の多項式である $B, C, \cdots, L$ において，各係数をその絶対値でおき換え，また z を R でおき換えて得られる値の中の最大なものを M とすればよい．

このように M を定めて，上の説明で述べたとおりに ε を取るならば，z が与えられた範囲 C の内部にある限り，z の値のいかんに関せず，与えられた δ に対しては，いつも同じ ε で，

$$|h|<\varepsilon \quad \text{のとき} \quad |f(z+h)-f(z)|<\delta$$

とすることができる．この意味において $f(z)$ は範囲 C において**一様に連続**であるというのである．

一般に，閉じた区域 C に属する z の各々の値に対して連続的な函数は C において一様に連続である．ここでは特に多項式のみに関して証明をしたのである．

〔**定理 2.2**〕 $f(z)$ が一次以上の多項式ならば，

$$z\to\infty \quad \text{のとき} \quad f(z)\to\infty.$$

〔解説〕 定理の意味は，z の絶対値を十分大きくするならば，$f(z)$ の絶対値をいくらでも大きい予定の限界以上に出させることができるというのである．すなわち K が任意に与えられた正数であるとき，それに応じて適当に R を定めて，

$$|z|>R \quad \text{のとき} \quad |f(z)|>K$$

になるようにすることができるのである.

〔証〕 $$f(z)=az^n+bz^{n-1}+\cdots+l \qquad (a\neq 0,\ n\geqq 1)$$

とすれば

$$f(z)=az^n\left(1+\frac{b}{a}\ \frac{1}{z}+\cdots+\frac{l}{a}\ \frac{1}{z^n}\right).$$

括弧の中を $1+\Theta$ とおく. すなわち

$$f(z)=az^n(1+\Theta),$$

$$\Theta=\frac{b}{a}\left(\frac{1}{z}\right)+\cdots+\frac{l}{a}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Θ を $\dfrac{1}{z}$ の多項式とみなせば, 定理 2.1 によって

$$\frac{1}{z}\to 0 \quad \text{のとき} \quad \Theta\to 0.$$

ゆえに 1 よりも小さい任意の正数 (それは何でもよいが, きまりをつける

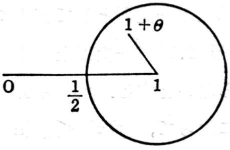
ために $\frac{1}{2}$ としよう) を与えるならば,

$$\left|\frac{1}{z}\right|<\varepsilon \ \text{のとき} \ |\Theta|<\frac{1}{2}, \ \text{したがって} \ |1+\Theta|>\frac{1}{2}$$

になるような ε が定められる.

そうすれば

$$|f(z)|=|az^n|\,|1+\Theta|>\frac{1}{2}|az^n|.$$



ゆえに

$$|f(z)|>K$$

にするには

$$\frac{1}{2}|az^n|>K$$

すなわち

$$|z|>\sqrt[n]{\frac{2K}{|a|}}$$

とすれば十分である.

$|z|$ に課した条件は，これと $\left|\dfrac{1}{z}\right|<\varepsilon$ すなわち $|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ とであるから，R を $\dfrac{1}{\varepsilon}$ および $\sqrt[n]{\dfrac{2K}{|a|}}$ よりも大きくすれば，要求のとおりに

$$|z|>R \quad \text{のとき} \quad |f(z)|>K$$

になる．

〔**問題 1**〕 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+l$ において，係数も変数も実数とする．しからば x が絶対値においてある限界を越えて大きくなるとき，$f(x)$ の符号は ax^n の符号と一致する（ただし $a\neq 0$）．

また x が絶対値において十分に小さい間は，$f(x)$ の符号は l の符号と一致する（ただし $l\neq 0$）．

〔解〕 定理 2.2 と同じように

$$f(x)=ax^n(1+\Theta)$$

とおけば，$|x|$ を十分に大きくするとき，$|\Theta|<\dfrac{1}{2}$，したがって $1+\Theta>\dfrac{1}{2}$ になる．すなわち $1+\Theta$ は正であるから，前段は証明された．

後段は $x\to 0$ のとき $f(x)\to l$ であるから明白．

§ 9.　代数学の基本定理

1.　次に述べる代数学の基本定理の証明は三段に分かれる．まず，その第一段を独立の一定理として初めに片付ける．

〔**定理 2.3**〕 一次以上の多項式 $f(z)$ が z に α という値を与えたときに 0 にならないとする．$f(\alpha)\neq 0$．しからば，どんなに α に近いところでも，z を適当に取って，$|f(z)|<|f(\alpha)|$ とすることができる．

また $f(\alpha)$ は 0 であっても，0 でなくても，$|f(z)|>|f(\alpha)|$ とすることもできる．

〔注意〕 前段は $f(\alpha)\neq 0$ という仮定がなくては意味をなさない．後段は基本定理の証明には必要でないが，問題それ自身の興味のために，一緒に証明するのである．

〔**証**〕 $f(z)$ を n 次の多項式として，α の近くに取ろうとする z を $\alpha+h$ とおく．$z=\alpha+h$．

$f(z)$ すなわち $f(\alpha+h)$ を h の昇冪に排列すれば

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+Bh+Ch^2+\cdots+Lh^n,\quad (L\neq 0)$$

のような形になるが，$B, C, \cdots$ などが 0 になる場合もあり得るから，それも引きくるめて考察するために，

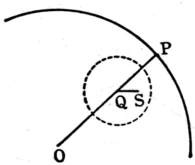
$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+ah^e+bh^{e+1}+\cdots+lh^n$$

というようにしるして $a\neq 0$ とする．$a, b, \cdots, l$ などの式を計算する必要はない．ただそれらは h には関係のない定数であることだけに注意すればよろしい．上の式を更に次のように書く．

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+ah^e(1+\Theta). \tag{1}$$

すなわち，ここで

$$\Theta=\frac{b}{a}h+\cdots+\frac{l}{a}h^{n-e}. \tag{2}$$



複素数平面上において，点 P が $f(\alpha)\neq 0$ を表わすとする．Q を OP 上の点とし，ah^e がベクトル PQ で表わされるようにする．すなわち

$$\operatorname{arc}(ah^e)=\operatorname{arc} f(\alpha)+\pi \tag{3}$$

で，かつ

$$|ah^e|<|f(\alpha)|. \tag{4}$$

（3）から h の偏角がきまり，また（4）から $|h|$ に上の限界が付けられる．さて $ah^e\Theta$ を表わすベクトルを $\overrightarrow{QS}$ とすれば，（1）によって

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+ah^e+ah^e\Theta$$

であるから，$f(\alpha+h)$ は点 S で表わされる．ゆえに OS<OP になるように h を取ることができるならば，$|f(\alpha+h)|<|f(\alpha)|$ になるから，定理の前段は証明される．それには QS<QP にすればよい．すなわち

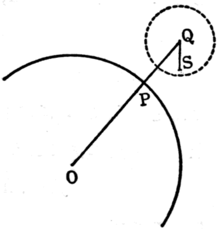
$$|ah^e\Theta|<|ah^e| \text{ すなわち } |\Theta|<1 \tag{5}$$

にすればよい．

上の（2）の Θ の式を見れば，$|\Theta|<1$ にするには，$|h|$ を適当に小さくすればよい．前に $|h|$ に課された条件（4）は $|h|$ がある限界以内にあること

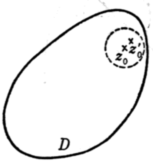
であったから，つまり $|h|$ を適当に小さくとれば（4）と（5）とを同時に満足させることができる．すなわち定理の前段が証明されたのである．

後段の証明も同様である．ただ ah^e を表わすベクトルを OP の延長の上にとって，QS<PQ にすればよい．



前の証明で ah^e を表わすベクトル PQ を必ずしも OP の上に取る必要はない．PQ を P から円 (O) の内〔外〕部に向けて取ってもよい．ただその場合には S を確実に円 (O) の内〔外〕部に止まらせるには，QS/PQ<1 だけでは不十分である．

2.　この定理の帰結として，次のことがいわれる．z の変動を複素数平面上の一区域 D の内部（たとえば一つの円内）に限る場合に，その区域の内部の一点 z_0 において $|f(z)|$ の値が最も大きくなることはできない．なぜならば，z_0 が区域の内部にある以上，z_0 を中心としてまったく区域内に含まれる一つの円を描くことができて，その円内において $|f(z'_0)|>|f(z_0)|$ になるような点 z_0' が必ずあるからである．



したがって $|f(z)|$ の最も大きくなる点は必ず区域の限界線上になければならない．また $f(z)$ がこの区域内において 0 にならない限り区域内の一点 z_0 において $|f(z)|$ が最小の値をもつこともない．したがって $|f(z)|$ の最小である点は区域の限界線上になければならない．対偶をいえば，区域の限界線上で $|f(z)|$ が最小にならないならば，$f(z)$ は必ず区域の内部のある点で 0 にならなければならない．これが基本定理の証明の根拠になるのである．

ある区域にその限界線をも属させていわゆる閉じた区域を考えるときは，その区域に属するある点において連続函数は最大（または最小）の値を実際に取るという定理は承認されたものとみなす．限界線を区域に属させないとき，すなわち，いわゆる開区域では，そうはいわれない．最大または最小がちょうど限界線上の点において起こることがあるからである．

3. 以上を前おきにすれば，基本定理の証明は容易である.

〔定理 2.4〕 代数方程式は必ず根をもつ.

このような場合に，方程式というのはもちろん一次以上の方程式をいうのである.

〔証〕 方程式を $f(z)=0$ として，z に任意の値 α を与える．そのとき $f(z)=0$ ならば，α がすなわち根である．よって $f(\alpha)\neq 0$ とする．定理 2.2 によって $|z|$ を十分に大きくすれば，$|f(z)|$ をいくらでも大きくすることができるから，z を表わす複素数平面上において，0 を中心として α を含む適当な円を描いて，その円周上の各点において $|f(z)|>|f(\alpha)|$ とすることができる（定理 2.2)．そうすれば，z をこの円内で変動させるときに，$|f(z)|$ の最も小さくなるのは，円周上の点ではない（そのために上の円内に α を含ませておいたのである)．したがってこの円内において，$f(z)$ が 0 になるところがなければならない．すなわち基本定理が証明されたのである.

代数学の基本定理は Gauss が初めて証明した．Gauss の証明は三つあるが上の証明は Cauchy の方法によったもので，普通，代数書に掲載されるものである．Gauss の第三証明は，その形を変えて，函数論の書に掲載される．本書で後に再び他の証明を掲げるであろう.

4. 基本定理が証明された上は，n 次の多項式が n 個の一次因数に分解されることが確定する（§ 7).

もし一次因数の中に相等しいものがあれば，それらを一つの冪にまとめて（記号を変えて）しるせば，

$$f(z)=a_0(z-\alpha)^a(z-\beta)^b\cdots(z-\lambda)^l,$$

$$\alpha\neq\beta\neq\cdots\neq\lambda, \qquad a+b+\cdots+l=n.$$

a_0 は $f(z)$ における n 次の項の係数である（$a_0\neq 0$).

〔問題 1〕 上の分解はただ一様に限る.

〔解〕 α' を $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ と異なる数とするとき，$f(z)$ が $z-\alpha'$ のような因数をもち得ないことは明らかである．もしそのような因数があるとすれば，$f(\alpha')=0$ すなわち $a_0(\alpha'-\alpha)^a(\alpha'-\beta)^b\cdots(\alpha'-\lambda)^l=0$．$a_0\neq 0$, $\alpha'-\alpha\neq 0$, $\cdots$, $\alpha'-\lambda\neq 0$ だから，これは不可能である（§ 1. (10)).

ゆえに上と違った分解が可能ならば，一次因数は同じでも，指数が違うことになろう.

たとえば $f(z)$ は一次因数 $z-\alpha$ の a よりも大きい指数をもつ冪 $(z-\alpha)^m$, $m=a+e$, $e>0$ で割り切れて

$$a_0(z-\alpha)^a(z-\beta)^b\cdots=(z-\alpha)^{a+e}\mathrm{P}(z)$$

のような等式が, z のすべての値に対して成り立つことになる. $\mathrm{P}(z)$ は多項式である. このような等式が不可能であることは, 多項式の連続性によっても証明される. $z=\alpha$ 以外の任意の値を与えるならば, $z-\alpha\neq 0$ だから, 両辺を $(z-\alpha)^a$ で割って

$$a_0(z-\beta)^b\cdots=(z-\alpha)^e\mathrm{P}(z)$$

を得る. $z\to\alpha$ のとき, 左辺$\to a_0(\alpha-\beta)^b\cdots\neq 0$, 右辺$\to 0$. これは矛盾である(参照, §22, 3).

$f(z)$ が一次因数 $z-\alpha$ をちょうど k 回だけ含むとき, α を $f(z)$ の k 次の根という. $k>1$ のとき総称して複根という. k がその重複度数である. §7, 2公式(2)から見えるように, α が k 次の根であることの鑑別条件は

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \cdots,\ f^{(k-1)}(\alpha)=0,\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

である(参照, §22, 3).

〔**問題 2**〕 実係数をもつ多項式が虚根 α をもつときには, それと共役な虚根 $\bar{\alpha}$ をももつ. しかもそれらの重複度数は相等しい.

〔解〕 $f(z)$ の係数が実数であるから, $f(\alpha)$ と $f(\bar{\alpha})$ とは互いに共役である. ゆえに $f(\alpha)=0$ ならば, $f(\bar{\alpha})=0$. 複根の場合には $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$ をも考察すればよい. $f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$, $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$ ならば, $f'(\bar{\alpha})=f''(\bar{\alpha})=\cdots=f^{(k-1)}(\bar{\alpha})=0$, $f^{(k)}(\bar{\alpha})\neq 0$.

§ 10. 根の連続性

1. 任意の多項式 $f(z)$ と複素数平面上の単純な閉曲線(二重点をもたない閉曲線) C とが与えられたとして, z が C の上を正の向きに(C の内部を左に見ながら)一周して元の位置に帰るとすると, それに伴って $f(z)$ は連続的に変動するが, その際 $\operatorname{arc} f(z)$ は結局どれだけの増減をするであろうか.

〔**定理 2.5**〕 $f(z)=0$ の根のうち k 個 ($k\geqq 0$, 複根は重複度数を数える) が単純な閉曲線 C の内部にあって, その他は C の外部にあるならば, z が C の上を正の向きに一周するとき, $\operatorname{arc} f(z)$ は $2k\pi$ だけ増加する.

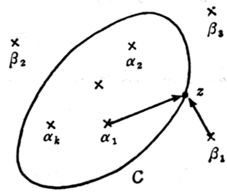
〔**証**〕 いま $f(z)$ を n 次とし, C の内部にある根を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$, C の外部にある根を $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-k}$ とする. すなわち

$$f(z)=a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_k)(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots$$

とする．しからば

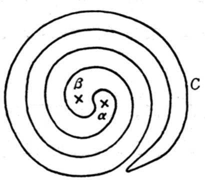
$$\operatorname{arc} f(z)=\operatorname{arc} a+\sum_{\alpha}\operatorname{arc}(z-\alpha)+\sum_{\beta}\operatorname{arc}(z-\beta)$$

であるから，$\operatorname{arc} f(z)$ の増加は $\operatorname{arc}(z-\alpha)$ と $\operatorname{arc}(z-\beta)$ との増加の総和である．



さて z が C を正の向きに一周するとき $\operatorname{arc}(z-\alpha)$ は各々 2π だけ増加し，また $\operatorname{arc}(z-\beta)$ には結局増減がないことは右の図から見て明白である．ゆえに $\operatorname{arc} f(z)$ は $2k\pi$ だけ増加する．

上の考察においては，偏角そのものの大きさでなく，偏角の増減に注目しなければならない．すなわち z が C の周上を一周するに伴ってベクトル $\overrightarrow{\alpha z}$ または $\overrightarrow{\beta z}$ は，あるときは正の向きに，またあるときは負の向きに，行きつ戻りつ回転して，ついにもとの位置に帰るのであるが，その間に，正負の差引をして，結局どれだけの回転をしたか，その回転の純量が問題である．$\overrightarrow{\alpha z}$ も $\overrightarrow{\beta z}$ も結局はもとの位置に帰るのであるから，回転の純量は 2π の整数倍すなわち $2m\pi\,(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ でなくてはならないが，内部の点 α に関しては $m=1$，また外部の点 β に関しては $m=0$ であるというのである．これは実は C の内部と外部とを区別するところの特徴である．いまここで位相学上の根本問題に立入ることはできないから，常識的にこの事実を承認することにしておかねばならない．



また上の考察は偏角 $\operatorname{arc} f(z)$ が連続的に変動することを緊要の条件とするので，この条件なしには意味をなさない．よって曲線 C が $f(z)=0$ の根を通過する場合を除外したのである．α が C の上の点ならば，$\operatorname{arc}(z-\alpha)$ は，z が α を通過するに際して突然 π だけの変動をする．あるいはすでに変動が連続的でないとする以上，π の任意の奇数倍に等しい変動をするといってもさしつかえないであろう*．

* α が C の周上で，多角形の頂点のような「かど」になってはいないと仮定していう．

2. 上の定理2.5を証明するのに，代数学の基本定理，すなわちn次の多項式 $f(z)$ が n 個の一次因数に分解されることを根拠とした．この基本定理を使わないで，証明を試みるならば，次のようになる．

C の内部にある $f(z)=0$ の根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ とすれば，各根に一次因数が伴うから（§ 7，4），

$$f(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_k)\varphi(z)$$

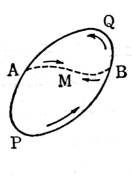
を得る．$\varphi(z)$ は C の内部には根をもたない多項式である．ゆえに

$$\text{arc}\, f(z)=\sum \text{arc}(z-\alpha)+\text{arc}\,\varphi(z)$$

であるから，z が C を一周するとき，arc $\varphi(z)$ の増加が 0 であることがわかればよい．それを $\varphi(z)$ を一次因数に分解しないで，ただ $\varphi(z)$ の連続性のみを根拠として証明しようというのである．

z が C の上またはその内部（C を境界とするこの閉じた面分を D と名づける）にあるとき，$\phi(z)$ は 0 にならないという仮定だから，D における $|\varphi(z)|$ の最小値を M とすれば，$M>0$．いま r を M よりも小さいある定まった数，たとえばきまりをつけるために $r=\dfrac{M}{2}$ とする．$w=\varphi(z)$ を表わす複素数平面上，原点を中心，r を半径とする円を Γ とすれば，z が D において運動するときに，w は Γ の外部にあって，かつ Γ までの距離が r よりも近くなることはない．

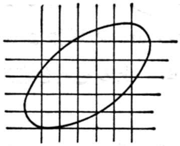
z が C の上を一周するときの arc w の増加を見るのに，C 上の二つの点 A，B を C の内部にある曲線 AMB で結び付けて D を二つの部分に分けて，z がその各部の周囲を一周するときの arc w の増加を加えてもよい（図 1）．すなわち C の代わりに APBMA と AMBQA との二つの通路を取るので，AMB を反対の向きに 2 回通過することになるが，それは arc w の増加の純量には影響しない．



（図 1　z-平面）

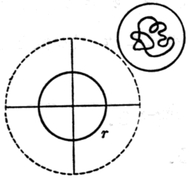
この手順を繰り返して，面分 D を幾つの部分に分けても同様であるから，いま z 平面上に方眼を引いて D を N 個の部分に分

けたとする（図 2).



（図 2　z-平面）

D において，$\varphi(z)$ が一様に連続であること(§8)によって，この方眼を十分小さくするならば，z が一方眼の中を動く間，w の変動が絶対値において r よりも小さくなる．すなわち z が一方眼に属する D の各部分の周を一周するときに，w はまったく Γ の外部にある半径 r の円内で動いているのであるから，その際 arc w の増加は明らかに 0 である（図 3).



（図 3　w-平面）

よって z が C を一周するときの arc w の増加は，N 個の 0 の和で，すなわち 0 に等しい．すなわち定理 2.5 の証明ができたのである．

3.　定理 2.5 から次の定理が得られる．

〔**定理 2.6**〕（**Rouché の定理**）単一な閉曲線 C の上で，多項式 $\psi(z)$ が絶対値において $\varphi(z)$ よりも小ならば，$\varphi(z)$ と $\varphi(z)+\psi(z)$ とは C の内部において同数の根をもつ．

〔**証**〕 C の上で $|\psi(z)|<|\varphi(z)|$．ゆえに $\varphi(z)$ は C の上で 0 にならない．（このことは定理の言明の中に入れておくのが親切であったかも知れない）また C の上で $\varphi(z)+\psi(z)$ も 0 にならない．ゆえに C の内部にある根の数が同数であることを示すには，z が C を一周するときの arc $\varphi(z)$ と arc$\{\varphi(z)+\psi(z)\}$ との増加が相等しいことを見ればよい．さて

$$\varphi(z)+\psi(z)=\varphi(z)\left(1+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right),$$

$$\operatorname{arc}\{\varphi(z)+\psi(z)\}=\operatorname{arc}\varphi(z)+\operatorname{arc}\left(1+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)$$

で，z が C を一周するとき，仮定によって $\left|\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right|<1$ であるから，

$$1+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

は 1 を中心として 1 よりも小さい半径をもつ円の内部に止まる．したがってその arc の増加は 0 である．すなわち定理にいってある通り．

4. 上の定理を応用すれば，代数学の基本定理の簡単な証明ができる．

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

とすれば，$|z|=R$ を適当に大きく取るとき，

$$|a_0z^n|>|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|$$

になることは前に述べた．よって Rouché の定理で，C を $|z|=R$ なる円，$\varphi=a_0z^n$，$\psi=a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ とすれば，$f(z)$ は C の内部に n 個の根をもつことが知られるのである．

5. Rouché の定理を応用して，なお一つの定理を証明する．

〔定理 2.7〕 代数方程式の根は係数の連続函数である．

〔**証**〕 まず定理の意味を説明する．方程式

$$f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

において，係数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ が変動するならば，根も変動するであろうが，各係数の変動の範囲を適当に小さく制限することによって，根の変動を予定の範囲内に止まらせることができるというのである．

証明すべきことは，複根の場合をも考慮していえば，次のようになる．根の変動は，絶対値において，δ 以内と限定する．

z_0 を $f(z)=0$ の k 重根とする　$(k\geqq 1)$．

z_0 を中心，$r\ (\leqq\delta)$ を半径とする円を C とする．ただし C は内部にも周の上にも，z_0 の外の根を含まないと仮定する．$r\leqq\delta$ であるから，それはさしつかえない．

そこで，係数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を a_0+h_0，$a_1+h_1, \cdots$，a_n+h_n に変えるのであるが，適当に ε を定めて，$|h_0|<\varepsilon$，$|h_1|<\varepsilon$，$\cdots$，$|h_n|<\varepsilon$ とすれば，係数変更後の方程式

$$f(z)+\psi(z)\equiv f(z)+h_0z^n+h_1z^{n-1}+\cdots+h_n=0$$

は円 C の内部にちょうど k 個の根をもつであろう．

このことが証明されるならば，係数変動後の方程式の各根は原方程式のある

根からの距離において，予定の制限 δ を越えることがないのである．

問題がこのように整理された上は，その解決は容易である．

仮定によって，C の周上で $f(z)$ は 0 にならないから，C の周上での $|f(z)|$ の最小値を m とすれば，$m>0$.

C の周上での $|z|$ の最大値を M とし，$|h_0|, |h_1|, \cdots, |h_n|$ の最大の値を h とすれば，C の周上で

$$|\psi(z)|=|h_0z^n+h_1z^{n-1}+\cdots+h_n|\leqq h(M^n+M^{n-1}+\cdots+M+1).$$

よって ε を十分小さく取って，$h<\varepsilon$ とすれば，C の周上で

$$|\psi(z)|<m \quad \text{すなわち} \quad |\psi(z)|<|f(z)|.$$

そこで Rouché の定理によって

$$f(z)+\psi(z)=0$$

は C の内部において $f(z)=0$ と同数の根，すなわち k 個の根をもつのである．

〔**問題 1**〕 n 次の方程式 $f(z)=0$ が単位円内 ($|z|<1$) に m 個，円外に $m'=n-m$ の根をもつとする (周上にはない)．しからば，

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$f^*(z)=\bar{a}_nz^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_0$$

とするとき，方程式

$$f(z)+\lambda f^*(z)=0 \tag{1}$$

は，(1°) $|\lambda|<1$ ならば，単位円内に m 個，円外に m' 個の根をもつ．(2°) $|\lambda|>1$ ならば，単位円内に m' 個，円外に m 個の根をもつ．(3°) $|\lambda|=1$ ならば，単位円の周上に少なくとも $|m-m'|$ 個 (単位円の内外に同数) の根をもつ．

〔解〕 $f(z)=a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ とすれば，

$$f^*(z)=\bar{a}_0(1-\bar{\alpha}_1z)(1-\bar{\alpha}_2z)\cdots(1-\bar{\alpha}_nz)$$

で，$f^*(z)$ の根は単位円周に関して $f(z)$ の根の鏡像である (§ 6,3)．ゆえに

$$\frac{f(z)}{f^*(z)}=\frac{a_0}{\bar{a}_0}\Pi\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_kz},$$

したがって単位円周上において ($|z|=1$)，$\left|\dfrac{f(z)}{f^*(z)}\right|=1$ (§ 6, 問題 5)．

仮定によって $f(z)$ は単位円周上には根をもたない．しからば $|\lambda|<1$ のとき，単位円周上において

$$\left|\frac{\lambda f^*(z)}{f(z)}\right|<1.$$

ゆえに Rouché の定理によって単位円内における（1）の根の数は m である．$|\lambda|>1$ の場合は f と f^* とを交換して考えればよい．

$|\lambda|=1$ の場合は根の連続性による．いま練習のためにその方法を説明する．（1）において λ に $|\lambda|=1$ なる一定の値を与えたとするとき，（1）の根は単位円の内部，外部に N ずつ，周上に N_0 あるとする．*

$$N_0+2N=n.$$

内部または外部にある根から単位円周までの最短距離を r とする．根の連続性によって λ を十分小さい範囲内において変動させるとき，各根の変位を r 以内の距離に限ることが出来るから，この範囲内において λ の近くに，$|\lambda_1|<1$ である λ_1 または $|\lambda_2|>1$ である λ_2 を取って見る．しからば（1）において λ に λ_1 を代入するとき，その根のうち N は確かに単位円の内部に，また他の N は確かに単位円の外部にある．しかるに，上の証明によって $\lambda=\lambda_1$ のとき（1）は単位円の内部に m 個，外部に m' 個の根をもつのであるから，

$$m\geqq N, \qquad m'\geqq N,$$

ゆえに

$$2m+N_0\geqq n, \qquad 2m'+N_0\geqq n$$

$$N_0\geqq n-2m=m'-m \qquad N_0\geqq n-2m'=m-m'.$$

すなわち

$$N_0\geqq |m-m'|.$$

〔注意〕 $f(z)$ が単位円周上に根 α をもてば，$\dfrac{1}{\bar{\alpha}}=\alpha$ であるから，α は $f^*(z)$ の根である．この場合には，$f(z)$ からそれらの根を省いておいて，上の定理を適用することができる．

§ 11. 有理函数，部分分数

1. 分母も分子も z に関する多項式である分数式

$$\frac{f(z)}{g(z)} \tag{1}$$

を z の函数と見るとき，それを有理函数という．

z に α なる値を与えるとき，分母 $g(\alpha)\neq 0$ ならば，有理函数の値は定ま

* $|\lambda|=1$ だから，$\lambda=\mu/\bar{\mu}$ として，（1）を $F(z)=\bar{\mu}f(z)+\mu f^*(z)=0$ と書くことができる．しからば $F(z)=F^*(z)$．したがって α が（1）の根ならば，$1/\bar{\alpha}$ も（1）の根だから，（1）は単位円の内外に同数の根をもつ．

る．その値を c とすれば，

$$\frac{f(z)}{g(z)}-c=\frac{(z-\alpha)h(z)}{g(z)} \tag{2}$$

のようになる．$z=\alpha$ のとき左辺は 0 になるから，右辺の分子は 0 になり，したがって $z-\alpha$ で割り切れるからである．いま z の変動の範囲を α の付近に限って，その範囲内において $g(z)$ は 0 にならないようにすれば，それらの z の値に対して

$$|h(z)|<A, \qquad |g(z)|>B\neq 0$$

のような A, B が求められる．しからば

$$\left|\frac{(z-\alpha)h(z)}{g(z)}\right|<|z-\alpha|\frac{A}{B}.$$

ゆえに（2）によって $z\to\alpha$ のとき $\dfrac{f(z)}{g(z)}\to c$. すなわち $z=\alpha$ において有理函数（1）は連続である．

特に $c=0$ ならば，$\dfrac{f(z)}{g(z)}\to 0$.

もし $z=\alpha$ とするとき，$g(\alpha)=0$, $f(\alpha)\neq 0$ ならば，$z\to\alpha$ のとき，$\dfrac{g(z)}{f(z)}\to 0$, したがって $\dfrac{f(z)}{g(z)}\to\infty$. すなわち z が複素数平面において，どの方面から α に近づいても，$\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right|$ は限りなく増大するのである．

2.　次に z の絶対値が限りなく増大するとき，有理函数 $f(z)/g(z)$ の変動を見るために，まず $f(z)$ と $g(z)$ とが同次の場合を考察する．よって

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{az^n+a'z^{n-1}+\cdots}{bz^n+b'z^{n-1}+\cdots}, \qquad a\neq 0,\ b\neq 0$$

とする．しからば

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a+\dfrac{a'}{z}+\cdots}{b+\dfrac{b'}{z}+\cdots}$$

で，右辺の分母，分子は $\dfrac{1}{z}$ に関する多項式であるから，$z\to\infty$ すなわち

$\dfrac{1}{z}\to 0$ のとき

$$\frac{f(z)}{g(z)}\to\frac{a}{b}.$$

もしも，分子 $f(z)$ が分母 $g(z)$ よりも低次ならば，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{az^{n-k}+a'z^{n-k-1}+\cdots}{bz^n\;+b'z^{n-1}\;+\cdots},\qquad a\neq 0,\ b\neq 0$$

$$=\frac{a\left(\dfrac{1}{z}\right)^k+a'\left(\dfrac{1}{z}\right)^{k+1}+\cdots}{b+b'\left(\dfrac{1}{z}\right)+\cdots}$$

のようになるから，

$$z\to\infty\quad のとき\quad \frac{f(z)}{g(z)}\to 0$$

もしも，分子が分母よりも高次ならば，$z\to\infty$ のとき $\dfrac{g(z)}{f(z)}\to 0$ になるから

$$\frac{f(z)}{g(z)}\to\infty.$$

総括すれば，有理函数

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{az^m+a'z^{m-1}+\cdots}{bz^n+b'z^{n-1}+\cdots},\qquad a\neq 0,\qquad b\neq 0$$

において，$z\to\infty$ のとき

$$m\gtreqqless n\quad にしたがって\quad \frac{f(z)}{g(z)}\to\begin{cases}\infty,\\ \dfrac{a}{b}(a\neq 0,\ b\neq 0),\\ 0.\end{cases}$$

$z=\alpha$ のとき，$f(z)$ も $g(z)$ も 0 になるならば，$f(\alpha)/g(\alpha)$ は 0/0 のような形になるが，この場合には $f(z)$ と $g(z)$ とは因数 $z-\alpha$ を共有する．このような共通の因数で約分して，$f(z)/g(z)$ を「既約の形」$f_0(z)/g_0(z)$ にするならば，$z=\alpha$ のような値を除くとき，常に

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f_0(z)}{g_0(z)}$$

であるから，$z\to\alpha$ のとき，f/g は f_0/g_0 と同様の変動をする．すなわち $\dfrac{f(z)}{g(z)}\to\dfrac{f_0(\alpha)}{g_0(\alpha)}$.

または $g_0(\alpha)=0$（$f_0(\alpha)\neq 0$）ならば，$\dfrac{f(z)}{g(z)}\to\infty$. よって z の函数としては $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ を

$\dfrac{f_0(z)}{g_0(z)}$ と同一のものと見るのである．

3. 有理函数（1）の分母と分子を一次因数に分解して（共通の因数を取り除き）

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a(z-\alpha)^h(z-\alpha')^{h'}\cdots}{b(z-\beta)^k(z-\beta')^{k'}\cdots}$$

とする．

$z=\alpha$ のとき有理函数は 0 になる．α を有理函数（1）の h 次の根（または 0 点）という．$z=\alpha'$ などに関しても同様である．

$z=\beta$ に対しては有理函数は不連続であるが，$z\to\beta$ のとき絶対値において限りなく増大する．このような $z=\beta$ を有理函数（1）の k 次の極（または∞点）という．

また $z\to\infty$ のとき $f(z)$ が $g(z)$ よりも高次であるかまたは低次であるかにしたがって，$\dfrac{f(z)}{g(z)}\to\infty$ または $\to 0$ である．これらの場合にも $z=\infty$ を有理函数の極または 0 点といい，f と g との次数の差をその極または 0 点の次数という．

$f(z)$ と $g(z)$ との次数の大きい方（小さくない方）を n とするとき，$z=\infty$ をも入れていえば $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ は次数を数えて n 個の 0 点および n 個の極をもつ．この n を有理函数の**次数**という．

〔**問題 1**〕 上の場合に $c\neq 0$ とするときにも，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=c$$

は重複の次数を計算に入れて，n 個の根をもつ．

〔解〕 $f(z)-cg(z)=0$ が n 次の方程式になるからである．ただし f,g が同次で $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{az^n+\cdots}{bz^n+\cdots}$ であるとき，$c=\dfrac{a}{b}$ とすれば，$f(z)-\dfrac{a}{b}g(z)=0$ の次数は n よりも低くなるが，この場合にも $z=\infty$ を $\dfrac{f(z)}{g(z)}=c$ の根と見なして，かつその重複の度数は上の次数低下の数に等しいと見れば，問題の通りになる．

4. 極 $z=\alpha$ の付近における有理函数の変動を見やすくするには，それを部

分分数に分解するのが適当である．いまその方法を述べる．$z=\alpha$ を k 次の極とすれば，α は有理函数の分母 $g(z)$ の k 次の根である．よって

$$g(z)=(z-\alpha)^k\psi(z),\qquad \psi(\alpha)\neq 0$$

とする．さて定数 q_0 を適当に定めて

$$\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{q_0}{(z-\alpha)^k}=\frac{f(z)-q_0\psi(z)}{g(z)} \tag{3}$$

における分子が $z-\alpha$ で割り切れるようにすることができる．

すなわち $f(\alpha)-q_0\psi(\alpha)=0$ から $q_0=\dfrac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}$．

このように q_0 を取れば，（3）の右辺を $z-\alpha$ で約すことができるから，右辺の有理函数においては，$z=\alpha$ は $k-1$ 次以下の極である．この有理函数から $\dfrac{q_1}{(z-\alpha)^{k-1}}$ のような分数を引いて，再び極の次数を低下させることができるから，この操作を続行すれば

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{q_0}{(z-\alpha)^k}+\frac{q_1}{(z-\alpha)^{k-1}}+\cdots+\frac{q_{k-1}}{z-\alpha}+\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \tag{4}$$

のようになる．$z=\alpha$ のとき $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ は有限であるから，$z\to\alpha$ のとき $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ が無限に大きくなる状況は

$$\frac{q_0}{(z-\alpha)^k}+\frac{q_1}{(z-\alpha)^{k-1}}+\cdots+\frac{q_{k-1}}{z-\alpha}$$

から見ることができる．これがすなわち $z-\alpha$ に関する $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の**部分分数**で，あるいはそれを極 $z=\alpha$ に関する $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の**主要部**ともいう．

係数 $q_0,q_1,\cdots,q_{k-1}$ を求めるには，割り算の演算法によることができる．（4）の両辺に $(z-\alpha)^k$ を掛けて

$$\frac{f(z)}{\psi(z)}=q_0+q_1(z-\alpha)+\cdots+q_{k-1}(z-\alpha)^{k-1}+\frac{(z-\alpha)^k\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

いま $f(z)$ および $\psi(z)$ を $z-\alpha$ の昇冪に排列し，簡単のために $z-\alpha=x$ とおいて

$$f(z)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$
$$\psi(z)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$$

とする．x の昇羃にしたがって f を φ で割って商を x^{k-1} の項まで求めるならば，剰余は x^k の項から始まって次のような等式を得る．

$$\frac{f}{\psi}=q_0+q_1x+\cdots+q_{k-1}x^{k-1}+\frac{x^k\varphi}{\psi}.$$

この商の係数 $q_0, q_1, \cdots, q_{k-1}$ がすなわち部分分数の係数である．

〔例〕 $\dfrac{z^2+3z-1}{(z-1)^3(z^2-z+2)}$. 　　$z-1=x$.

$$f=z^2+3z-1=3+5x+x^2,$$

$$\psi=z^2-z+2=2+x+x^2.$$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 3 & -1 \\ & 1 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 3 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ & 1 & \\ \hline 1 & 1 & \end{array}$$

商 3 項を要するから分数の係数を避けるために $8f$ を ψ で割れば

$$\begin{array}{r|l} & 12+14-9 \\ \hline 2+1+1\ ) & 24+40+\ 8 \\ & 24+12+12 \\ \hline & \quad\ 28-\ 4 \\ & \quad\ 28+14 \\ \hline & \qquad -18 \end{array}$$

商を 8 で割って，

$$\frac{3}{2(z-1)^3}+\frac{7}{4(z-1)^2}-\frac{9}{8(z-1)}.$$

これが $z-1$ に関する部分分数である．

$f(z)$ が $g(z)$ よりも低次でないときには，f を g で割って商を $Q(z)$，剰余を $f_0(z)$ とすれば，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=Q(z)+\frac{f_0(z)}{g(z)}. \tag{5}$$

$g(z)$ の相異なる根を α_1, $\alpha_2, \cdots$ とし，$z-\alpha_1$, $z-\alpha_2, \cdots$ に関する $f(z)/g(z)$ の部分分数を P_1, $P_2, \cdots$ とする．すなわち（4）にしるしてあるように，

$$P_1=\frac{q_0}{(z-\alpha_1)^k}+\frac{q_1}{(z-\alpha_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{q_{k-1}}{(z-\alpha_1)},$$

$$P_2=\frac{q_0'}{(z-\alpha_2)^{k'}}+\frac{q_1'}{(z-\alpha_2)^{k'-1}}+\cdots+\frac{q'_{k'-1}}{(z-\alpha_2)},\ \text{など}.$$

しからば次の等式が成り立つ．

$$\frac{f(z)}{g(z)}=Q(z)+P_1+P_2+\cdots \tag{6}$$

なぜならば，この式の両辺の差を仮りに $F(z)$ とすれば，$F(z)$ は分母が

$g(z)$ なる分数式であるが，$z \to \alpha_1$ のときには，

$$F(z) = \left(\frac{f(z)}{g(z)} - P_1\right) - Q(z) - P_2 - \cdots$$

として見れば，$\dfrac{f(z)}{g(z)} - P_1$ は有限の値に近づき，$Q(z)$，$P_2, \cdots$ ももちろん有限であるから，$F(z)$ は有限の値に近づく．ゆえに $F(z)$ の分母から $(z-\alpha_1)^k$ という因数が約されてしまわなければならない．$z-\alpha_2, \cdots$ に関しても同様であるから，約分の後，$F(z)$ は整函数になる．さて

$$F(z) = \left(\frac{f(z)}{g(z)} - Q(z)\right) - P_1 - P_2 - \cdots$$

として見れば，$z \to \infty$ のとき，（5）によって，$\dfrac{f(z)}{g(z)} - Q(z) \to 0$．また $P_1 \to 0$，$P_2 \to 0, \cdots$ である．よって整函数 $F(z)$ は $z \to \infty$ のとき0になる．ゆえに $F(z)$ は定数 0 に等しい．すなわち（6）が成り立つのである．

この結果を定理として掲げる．

〔**定理 2.8**〕 有理函数 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ において，$f(z)$ を $g(z)$ で割った整商を $Q(z)$ また $g(z)$ の根を α，α'，… とすれば，

$$\frac{f(z)}{g(z)} = Q(z) + \sum_{\alpha}\left[\frac{q_0}{(z-\alpha)^k} + \frac{q_1}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{q_{k-1}}{(z-\alpha)}\right].$$

右辺の括弧［　］の中は $z-\alpha$ に関する部分分数で，$\sum$ は $g(z)$ の相異なるすべての根 α，α'，… の上にわたるのである．

このような分解はただ一様に限る．たとえば $z-\alpha$ に関する部分分数は，それを $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ から引いた差が $z \to \alpha$ のとき有限であることによって決定する．

〔**問題 2**〕 $g(z) = (z-\alpha)(z-\beta)\cdots(z-\lambda)$ が単根のみをもつときは

$$\frac{f(z)}{g(z)} = Q(z) + \sum \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}\ \frac{1}{z-\alpha}.$$

〔解〕

$$\frac{f(z)}{g(z)} = Q(z) + \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \cdots + \frac{L}{z-\lambda}$$

とおいて，定数 $A, B, \cdots, L$ を求めるのである．A を求めるために両辺に $g(z)$ を掛けて $z=\alpha$ を代入すれば

$$f(\alpha) = A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\lambda) = Ag'(\alpha)$$

$g'(\alpha) \neq 0$ だから　$A = \dfrac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}$，同様に $B = \dfrac{f(\beta)}{g'(\beta)}$，…，$L = \dfrac{f(\lambda)}{g'(\lambda)}$.

特に

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}+\cdots+\frac{1}{z-\lambda},$$

ただしこの等式は $g(z)$ が複根をもつときにも成り立つ．α が k 重根ならば，左辺の有理式は $(z-\alpha)^{k-1}$ で約されるから，α は一次の極であるが，それに対する部分分数は，次にいうように $\dfrac{k}{z-\alpha}$ になるから，上の等式で $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ の中に α に等しいものが k 個あると見ればちょうど合うのである．実際

$$g(z)=a(z-\alpha)^k+b(z-\alpha)^{k+1}+\cdots$$

とすれば，

$$g'(z)=ka(z-\alpha)^{k-1}+(k+1)b(z-\alpha)^k+\cdots$$

ゆえに

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-\beta}+\cdots$$

の両辺に $(z-\alpha)$ を掛けて左辺を $(z-\alpha)^k$ で約してから，$z=\alpha$ とおけば $A=k$ を得る．

〔**問題 3**〕 z の n 個の相異なる値 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$ に対してそれぞれ $u_1,\ u_2,\cdots,u_n$ なる値を取るようななるべく低次の多項式 $f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{g'(\alpha_k)}\ \frac{g(z)}{z-\alpha_k}.$$

である．ただし $g(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$

これを **Lagrange の補間式**という．

〔解〕 問題 2 の等式の両辺に $g(z)$ を掛けるときは，いま求める $f(z)$ が上のようでなければならないことがわかる．さて，この $f(z)$ が実際，問題の条件に合うことは見やすい．$\sum$ の下に代表的に出ている整式は $z=\alpha_k$ のとき u_k になり，その他の $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ に対しては 0 になるから．

〔**問題 4**〕 $g(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ なるとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{\alpha_k}^{\nu}}{g'(\alpha_k)}=0,\qquad(\nu=0,1,\cdots,n-2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{\alpha_k}^{n-1}}{g'(\alpha_k)}=1.$$

これを **Euler の公式**という．

〔解〕 問題 2 の等式を $f(z)=z^{\nu+1}$ の場合に書いておいて，$z=0$ を代入する.

以下本章の付録として § 12〜14 において，Hermite, Gauss, Laguerre の定理について述べる．これらは特別な問題に関するものであるけれども，いずれも，いわゆる美しい定理で，簡単でかつ興味が多い．第一原理から直接に出すことも容易であるが，第1章，第2章の一般論の応用の練習としても手頃のものである.

§ 12. Hermite の定理および拡張

1. 〔**定理 2.9**〕 方程式 $f(z)=0$ の根の虚数部の符号が全部同一であるとき，係数の実部と虚部とを分けて $f(z)=U(z)+iV(z)$ とすれば，$U(z)=0$ も $V(z)=0$ も実根のみをもって，かつ $U(z)$ の根と $V(z)$ の根とは互いに隔離する (Hermite または Biehler の定理).

〔注意〕 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$, $a_0=b_0+c_0i$, $a_1=b_1+c_1i, \cdots$ とすれば

$$U(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n,$$
$$V(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n.$$

$U(z)$ と $V(z)$ とのうち一方だけは n 次よりも低いこともある ($b_0=0$ または $c_0=0$ のとき).

また $U(z)$ と $V(z)$ との根が互いに隔離するというのは，根がいずれも単根で，大小の順序において $U(z)$ の相接する二つの根の間に $V(z)$ の一つの根があり，また $V(z)$ の相接する二つの根の間に $U(z)$ の根が一つあるのをいう.

〔**証**〕 便宜上 $f(z)=0$ の根は実数軸の上側にあるとする．$U(z)=0$ または $V(z)=0$ の根がみな実数であることを，Hermite は次のように証明した.

$f(z)$ の各係数を共役なる複素数でおき換えるときに生ずる多項式を $\bar{f}(z)$ とする．しからば

$$U=\frac{f+\bar{f}}{2}, \quad V=\frac{f-\bar{f}}{2i}$$

である．また $f(z)=a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ とすれば，

$$\bar{f}(z)=\bar{a}_0(z-\bar{\alpha}_1)(z-\bar{\alpha}_2)\cdots(z-\bar{\alpha}_n)$$

で，仮定によって $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_n$ は実数軸の下側にある.

さて，方程式 $U(z)=0$ は

$$f(z)+\bar{f}(z)=0,$$

または

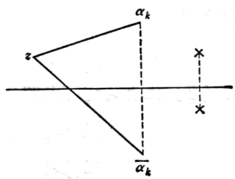
$$\frac{f(z)}{\bar{f}(z)}=-1$$

と書くことができる．すなわち

$$\frac{a_0}{\bar{a}_0}\,\frac{z-\alpha_1}{z-\bar{\alpha}_1}\cdot\frac{z-\alpha_2}{z-\bar{\alpha}_2}\cdots\frac{z-\alpha_n}{z-\bar{\alpha}_n}=-1. \tag{1}$$

いま z を実数軸の上側または下側に取れば，

$$\left|\frac{z-\alpha_k}{z-\bar{\alpha}_k}\right|<1 \quad \text{または} \quad >1.$$



また $\left|\dfrac{a_0}{\bar{a}_0}\right|=1$ であるから，（1）の左辺の絶対値は1よりも小または大になって，（1）が成り立たないことは明らかである，ゆえに（1），したがって $U(z)=0$ の根は，実数でなくてはならない．

$V(z)=0$ についても同様である．この場合には，（1）の右辺を $+1$ にして考えればよい．

この証明では，$U(z)=0$ と $V(z)=0$ との根が実数であることははなはだ明瞭に示されるけれども，その根の位置の関係については，何等の知識をも与えない．それは後回しにして，上の証明によって直ちに定理そのものの拡張が得られる．すなわち

$f(z)=0$ の根が実数軸の上側にあるときは，方程式

$$\frac{f(z)}{\bar{f}(z)}=\lambda \tag{2}$$

の根は

$|\lambda|=1$ 　ならば　みな　実数，

$|\lambda|>1$ 　ならば　みな　実数軸の下側，

$$|\lambda|<1 \quad ならば \quad みな\ 実数軸の上側$$

にある．前と同様に（2）の両辺の絶対値を比較すれば，直ぐにわかるのである．U，V で（2）を表わせば

$$U+iV=\lambda(U-iV),$$

すなわち

$$(1-\lambda)U+i(1+\lambda)V=0,$$

すなわち

$$U+\frac{i(1+\lambda)}{1-\lambda}V=0.$$

よって

$$\frac{i(1+\lambda)}{1-\lambda}=\kappa \tag{3}$$

とおけば

$$U+\kappa V=0.$$

さて（3）によって（参照，§ 6，34 頁）

$|\lambda|=1$　　ならば，　　κ は実数，

$|\lambda|>1$　　ならば，　　κ は実数軸の下側にあり，

$|\lambda|<1$　　ならば，　　κ は実数軸の上側にある

から，上の拡張された定理は次のようになる．

〔**定理 2.10**〕 上と同じ仮定のもとにおいて，方程式

$$U+\kappa V=0$$

の根は κ が実数ならば，みな実数，また κ が虚数ならば，みな虚数で，かつ根の虚数部は κ の虚数部と同じ符号をもつ．

さて，実根の場合に返って，方程式

$$\frac{f(z)}{\bar{f}(z)}=\lambda, \qquad |\lambda|=1$$

すなわち

$$\frac{a_0}{\bar{a}_0}\ \frac{z-\alpha_1}{z-\bar{\alpha}_1}\ \frac{z-\alpha_2}{z-\bar{\alpha}_2}\ \cdots\ \frac{z-\alpha_n}{z-\bar{\alpha}_n}=\lambda$$

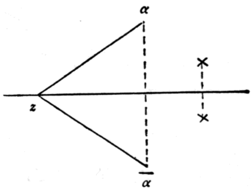
を考察する．

または因数$\dfrac{a_0}{\bar{a}_0}$を右辺に移して

$$\frac{z-\alpha_1}{z-\bar{\alpha}_1}\ \frac{z-\alpha_2}{z-\bar{\alpha}_2}\cdots\frac{z-\alpha_n}{z-\bar{\alpha}_n}=\lambda', \tag{4}$$

$$\lambda'=\frac{\bar{a}_0}{a_0}\lambda,\qquad |\lambda'|=1$$

を取り扱う方が便利である．



zが実数ならば，両辺の絶対値は相等しいから，更に両辺の偏角を比較する．ただし arc λ' はたとえば $(0,\ 2\pi)$ の間にきめておく．

zが実数軸の上を $-\infty$ から $+\infty$ まで移動するときに，arc$\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right)$は0から 2π まで単調に増大するから，（4）の左辺の arc は 0 から $2n\pi$ まで単調に増大する．ゆえにこの間に（4）の両辺の arc の差が 2π の倍数になり，したがって等式（4）が成り立つことが n 回ある．すなわち（4）は n 個の実根をもつのである．ただし arc $(\lambda')=0$（すなわち $\lambda'=1$）のときには，左辺の arc が 0 または $2n\pi$ になるのは $z=\pm\infty$ のときであるから，根は $n-1$ 個になるが，そのときには方程式（4）も $n-1$ 次になるのである．

根がみな実数であることは，しかしながら既知である．新たに知り得たことは，それらの根がみな単根であることである．

さて

$$\text{arc}\,(\lambda')=\theta,\qquad \text{arc}\,(\lambda_1')=\theta_1,$$

$$0\leqq\theta<\theta_1<2\pi$$

として

$$F(z)\equiv\Pi\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}=\lambda', \tag{5}$$

$$F(z)\equiv\Pi\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}=\lambda_1' \tag{6}$$

を比較して考えると，z が $-\infty$ から漸次増大して $z=z_1$ のとき $F(z)$ の

arc が θ に等しくなったとすれば，z_1 がすなわち（5）の最小の根である．それから z が更に増大するときに，初めて arc $F(z)$ が θ_1 に等しくなることがある．そのときの z の値を z_1' とすれば，z_1' がすなわち（6）の最小の根である．z がなお増大して，$z=z_2$ のとき arc $F(z)$ が $\theta+2\pi$ になり，z がなお増大して $z=z_2'$ のとき arc $F(z)$ が $\theta'+2\pi$ になるとすれば，z_2, z_2' は大小の順序においてそれぞれ（5），（6）の第二の根で

$$z_1<z_1'<z_2<z_2'.$$

z がなお増大するとき，このような関係が繰り返されて，（5），（6）の根が互いに隔離する．

$U(z)=0$, $V(z)=0$ は $\lambda=1$ および $\lambda=-1$ なる場合であるが，一般に k, k' を相異なる実数とするとき，

$$U-kV=0 \quad と \quad U-k'V=0$$

との根が互いに隔離するのである．

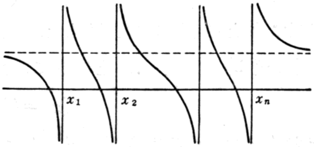
2. 上の Hermite の定理の逆が次のような意味で成り立つ．

〔**問題 1**〕 実方程式 $U(z)=0$, $V(z)=0$ の根が実数の単根のみで，かつ互いに隔離するならば，$U(z)-kV(z)=0$ の根は，k が実数ならば，ことごとく実数で，k の二つの相異なる値に対する二つの方程式の根は互いに相隔離する．また k が虚数ならば，根はみな虚数で，しかもことごとく実数軸の一側にある．そのいずれの側にあるかは，k の虚数部の符号によって定まる．

〔解〕 $U=0$ の引続いた二つの根の間では，U は一定の符号をもつ．仮定によって $U=0$ の根は単根であるから，それらの根を限界とする各区間における U の符号は正負交代する．また各区間内において V がただ一つの単根をもつから，$U=0$ の根である z の値に対する V の符号は交互に正または負である．語を換えていえば，z が増大しつつ $U=0$ の根を通過するとき UV の符号は常に正から負，または常に負から正に変わる．いまきまりをつけるために，後の場合を考察する．他の場合には U または V の代わりに $-U$ または $-V$ を取って考えればよい．

また U は V よりも低次でないと仮定する．さもなければ U と V とを交換して考えればよい．よって U を n 次，V は n 次または $n-1$ 次として，$V(z)/U(z)$ を部分分数に分解して

$$\frac{V(z)}{U(z)}=c_0+\frac{c_1}{z-x_1}+\frac{c_2}{z-x_2}+\cdots+\frac{c_n}{z-x_n}$$



とおく．z が増大しつつ x_1 を通過するときに，UV したがって $\dfrac{U}{V}$ の符号が負から正になるとすれば，$c_1>0$ でなければならない．$x_2, \cdots, x_n$ に関しても同様であるから，$c_2>0, \cdots, c_n>0$．よって $\dfrac{V}{U}$ のグラフは次のような形になる．

$x_1<x_2<\cdots<x_n$ として，z が区間 (x_i, x_{i+1}) において増大するとすれば，$\dfrac{c_1}{z-x_1}+\cdots+\dfrac{c_i}{z-x_i}$ は正でかつ単調に減少するが，$\dfrac{c_{i+1}}{z-x_{i+1}}+\cdots+\dfrac{c_n}{z-x_n}$ は負で絶対値において単調に増大する．ゆえにこの区間において $V(z)/U(z)$ は $+\infty$ から $-\infty$ まで，単調に減少する．区間 $(-\infty, x_1)$ および $(x_n, +\infty)$ においては c_0 から $-\infty$ まで，または $+\infty$ から c_0 まで単調に減少する．

ゆえに k が任意の実数であるとき，

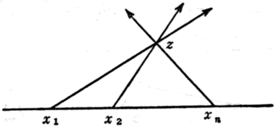
$$\frac{V(z)}{U(z)}=k$$

は $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_{n-1}, x_n)$ の各区間において一つずつの根をもち，なお $k<c_0$ または $k>c_0$ にしたがって，$(-\infty, x_1)$ または $(x_n, +\infty)$ のいずれかにおいて一つの根をもつ．$k=c_0$ ならば，$V-kU$ は $n-1$ 次になって，最後の一つの根は消失する（$+\infty$ または $-\infty$ になる）．

また k が変わるときの根の位置の変動も明瞭である．上の図の場合では，k が増せば各区間の根が単調に減少する．ただ k が $y=c_0$ の線を越えるときに，一つの根が区間 $(-\infty,\ x_1)$ から $(x_n,\ +\infty)$ に飛び移るのであるが，k の二つの値に対する二つの方程式の根の隔離には妨げない．

さて上の符号の仮定 $(c_1, c_2, \cdots, c_n>0)$ のもとにおいて，z に虚数の値を与えてみる．z が実数軸の上側にあれば $z-x_1, z-x_2, \cdots, z-x_n$ の虚数部は正，したがってそれらの逆数である

$$\frac{1}{z-x_1},\quad \frac{1}{z-x_2},\quad \cdots,\quad \frac{1}{z-x_n}$$



の虚数部は負である．$c_1,\ c_2, \cdots,\ c_n$ は正で，c_0 は実数であるから

$$\frac{V(z)}{U(z)}$$

の虚数部は負である．

また z の虚数部が負ならば，$\dfrac{V(z)}{U(z)}$ の虚数部は正である．ゆえに

$$U-kV=0 \quad \left(すなわち \quad \frac{V}{U}=-\frac{1}{k}\right)$$

の根は k と同符号の虚数部をもたなければならない.

〔**問題 2**〕 定理 2.9 と同様に, $f(z)$ を n 次の多項式とし,

$$f(z)=U(z)+iV(z)$$

とおくとき, κ の虚数部が正ならば, 方程式 $f(z)=0$ と $U(z)+\kappa V(z)=0$ とは実数軸の各側において同数の根をもつ.

また, $f(z)$ が実数軸の両側においてもつ根の数の差を d とすれば, 任意の実係数 k に関して方程式 $U(z)+kV(z)=0$ は少なくとも d 個の実根をもつ.

〔解〕 根の連続性 (定理 2.7) によれば簡単である. 係数 λ が i から κ まで連続的に, たとえば i と κ とを結ぶ線分上を動くとき, $U+\lambda V$ の根も連続的に変わるけれども, その間において根が実数になることはない (U と V との共通根は初めから除いておく). ゆえに実数軸の両側にある根は各々その側においてのみ変動するから, λ が変わっても, その数は一定である.

後段は前段を根拠にして, やはり根の連続性によって証明される. §10 の問題1とまったく同様である.

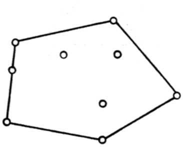
$f(z)$ の根が全部実数軸の一側にあるときは, 上の d は n に等しい. すなわち Hermite の定理である.

結論だけに着眼すれば, この問題 2 が §12 の全部を被うのであるが, §12 の数頁が無益の逍遙であったのでもあるまい.

§ 13. Gauss の定理

1. 多項式 $f(z)$ とその導函数 $f'(z)$ との根の複素数平面上における位置の関係に関して次の定理が成り立つ.

〔**定理 2.11**〕 $f(z)=0$ の根の全部を含む凸多角形は $f'(z)=0$ の根の全部を含む (Gauss の定理).



〔注意〕 凸多角形に含まれるとは, 周の上にある場合も入れていう. すなわち凸多角形をいわゆる閉面分と見るのである. $f(z)$ の根の全部を含む最小の凸多角形の場合に, この定理を証明すれば十分である. その場合には凸多角形の各頂点は $f(z)$ の根である.

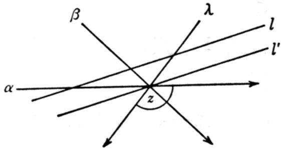
凸多角形はその各辺を含む直線の両側へは跨がらない

から，定理を次のように変形して証明すればよい．

$f(z)=0$ の根が直線 l の一側にあるときは，$f'(z)=0$ の根もその直線 l の同じ側にある．

〔**証**〕 方程式 $f(z)=0$ の根を $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ とする．$f(z)=0$ の複根は $f'(z)=0$ の根であるが，それらについては定理は当然成り立つから，$f'(z)=0$ の根の中からそれらを除けば，残りの根は

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}+\cdots+\frac{1}{z-\lambda}=0$$



を満足する．さて直線 l に対して $\alpha,\ \beta,\ \cdots,\ \lambda$ と反対の側に z を取れば，この等式が成り立たないことを示そう．

z を通って l に平行な直線 l' を引けば，$z-\alpha,\ z-\beta,\ \cdots,\ z-\lambda$ を表わすベクトルは z を起点とするときに，z に頂点をもつ二直角より小さい一つの角内に含まれる．したがって θ を適当に選んで

$$\theta<\operatorname{arc}(z-\alpha),\ \operatorname{arc}(z-\beta),\cdots,\operatorname{arc}(z-\lambda)<\theta+\pi$$

とすることができる．そうすれば

$$0>\theta-\operatorname{arc}(z-\alpha),\ \theta-\operatorname{arc}(z-\beta),\ \cdots,\ \theta-\operatorname{arc}(z-\lambda)>-\pi.$$

そこで $\varepsilon=\cos\theta+i\sin\theta$ とおけば，

$$\frac{\varepsilon}{z-\alpha},\ \frac{\varepsilon}{z-\beta},\ \cdots,\ \frac{\varepsilon}{z-\lambda}$$

の虚数部がことごとく負である．ゆえに

$$\frac{\varepsilon}{z-\alpha}+\frac{\varepsilon}{z-\beta}+\cdots+\frac{\varepsilon}{z-\lambda}\neq 0,$$

すなわち

$$\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}+\cdots+\frac{1}{z-\lambda}\neq 0.$$

なお精密に考えるならば，$f'(z)=0$ の根が直線 l の上にあることができるかという問題が残っている．上の証明で，z を直線 l の上に取るとき，$\alpha,\ \beta,\ \cdots,\lambda$ の中，一つでも l の上にないものがあれば，$\dfrac{\varepsilon}{z-\alpha},\cdots,\dfrac{\varepsilon}{z-\lambda}$ の虚数

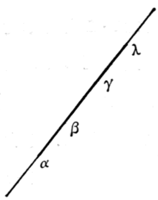
部は決して正にはならず，かつ実際負になるものがあるのだから，和はやはり 0 にならない．

すなわち $f(z)=0$ の根がことごとく一直線上にある場合を除けば，$f'(z)=0$ の根は，$f(z)$ の複根であるものの外，上の凸多角形の内部にあって，その周上にあることはできないのである．

この取除けの場合は，問題として次に掲げる．

〔**問題 1**〕 $f(z)=0$ の根が $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ の順で一直線上にあるときには $f'(z)=0$ の根は $f(z)$ の複根であるものの外は，その直線上 α, β の間，β, γ の間等に一つずつある．すなわち $f'(z)$ の根が $f(z)$ の根を隔離する．

〔解〕 線分 $(\alpha\lambda)$ を凸多角形の極端の場合と見ることができる．上の証明は $f'(z)=0$ の根が線分 $(\alpha\lambda)$ の上より外にはないことを示す．問題の定理を証明するには，$z-\alpha$ などの絶対値を考察しなければならない．右の図でいえば，z が β から γ まで移動するときに，$\dfrac{1}{(\alpha z)}+\dfrac{1}{(\beta z)}$ は ∞ からしだいに減少し，$\dfrac{1}{(\gamma z)}+\cdots+\dfrac{1}{(z\lambda)}$ は ∞ までしだいに増大して，それらが相等しくなるところがちょうど 1 個所あるのである．



〔注意〕 一次変形によって上の直線を実数軸に変換すれば，定理は Rolle の定理からも導かれることはもちろんである（§20）．

2. 上の Gauss の定理を次のようにいってもよい．

$f(z)=0$ の根の全部を含む凸平面形は $f'(z)=0$ の根の全部を含む．

このような凸平面形は，根の全部を含む最小の凸多角形を含むから，Gauss の定理を上のようにいい表わしても，定理の内容に変りはないが，応用上に都合のよい場合がしばしばある．

〔**問題 2**〕 絶対値でいえば，$f(z)$, $f'(z)$, $f''(z), \cdots$ の最大根は次々に減少する．

「減少」は不増加の意味である．すなわち $f^{(k)}(z)$ の根の絶対値の最大のものを $r^{(k)}$ とすれば $r \geqq r' \geqq r'' \geqq \cdots \geqq r^{(k)} \geqq \cdots$．

〔解〕 上の凸平面形を O を中心とする円にして考えよ．

〔**問題 3**〕 多項式 $f(x)$, $g(x)$ が実根のみをもち，かつ $f(x)$ と $g(x)$ と

の根が互いに隔離するときには，導函数，$f'(x)$，$g'(x)$ に関しても同様の関係がある．

〔解〕 Gauss の定理と Hermite の定理との組合せ．$f+ig$ の根が全部実数軸の一側にあるから，$f'+ig'$ の根も同様．したがって f'，g' の根が互いに隔離する．f''，g'' なども同様．

§14. Laguerre の定理

1. 多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_n$$

を斉次の形に書き表わして取り扱うのが便利な場合がしばしば生ずる．すなわち $f(x)$ の代わりに

$$f(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_kx^{n-k}y^k+\cdots+a_ny^n$$

とするので，もとの形に返るには，$y=1$ とおくのである．$f(x,y)$ の x および y に関する導函数を f_1，f_2 で表わすときは，

$$P(\xi,\eta\,;\,x,y)\equiv\xi f_1(x,y)+\eta f_2(x,y)$$

なる式は幾何学でポーラーとよぶものであるが，ここでは不斉次の形に返って，f_1 においても f_2 においても $y=1$ とおいて，同時に η をも 1 として，

$$P(\xi,x)=\xi f_1(x)+f_2(x)$$

をポーラーと呼ぶことにする．詳しくいえば，$P(\xi,x)$ は $f(x)$ に関する ξ のポーラーである．

たとえば，$f(x)=ax^2+2bx+c$ ならば

$$\frac{1}{2}P(\xi,x)=\xi(ax+b)+(bx+c)$$

である．

2. 方程式 $P(\xi,x)=0$ は $f'(x)=0$ の拡張である．$P(\xi,x)=0$ すなわち $f_1(x)+\dfrac{1}{\xi}f_2(x)=0$ は $\xi\to\infty$ のとき $f_1(x)=0$ すなわち $f'(x)=0$ になる．

この方程式 $P(\xi,x)=0$ に関して次の定理が成り立つ．それを $f'(x)=0$ に関して前節に述べた Gauss の定理の拡張と見ることができる．

〔**定理 2.12**〕（1）方程式 $f(x)=0$ のすべての根を含む円を C とし，ξ を C の外に取れば，

$$P(\xi, x)=0$$

の根はすべて円 C の内にある．

（2）ξ が円 C の周上にあっても同様であるが，特に $f(x)=0$ の根がことごとく C の周上にあるとき，ξ をも C の周上に取るならば，$P(\xi, x)=0$ の根もことごとく C の周上にある．

（3）この場合に，$P(\xi, x)=0$ の根と ξ とは C の周上において $f(x)=0$ の根を隔離する．

上文において円の内部と外部とを交換しても定理は成り立つ．また直線を円周の特別の場合と見なして円の内部外部というのを直線の一側と他側とに変更しても，成り立つ．

すなわち C を §6 に述べた円板としてよいのである．

〔**証**〕 $f(x)=a_0(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)$

とすれば

$$f(x, y)=a_0(x-\alpha y)(x-\beta y)\cdots(x-\lambda y),$$

$$\frac{f_1(x, y)}{f(x, y)}=\sum\frac{1}{x-\alpha y}, \qquad \frac{f_2(x, y)}{f(x, y)}=\sum\frac{-\alpha}{x-\alpha y}.$$

ゆえに

$$\frac{P(\xi, x)}{f(x)}=\sum\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha},$$

$\sum$ は α, $\beta, \cdots$, λ の上にわたるのである．

ゆえに $P(\xi, x)$ の根（f と共通でないもの）は

$$\sum\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}=0 \tag{1}$$

から求められる．いま一次変形

$$x'=\frac{1}{x-\xi} \tag{2}$$

によって問題を x 平面から x' 平面に換えるために，

$$\alpha'=\frac{1}{\alpha-\xi},\quad \beta'=\frac{1}{\beta-\xi},\cdots,\lambda'=\frac{1}{\lambda-\xi}$$

とおけば，（1）の各項は

$$\frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}=\frac{x'}{x'-\alpha'}$$

のようになる．よって（1）は

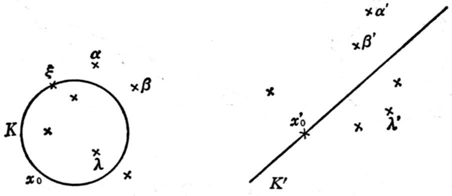
$$x'\sum\frac{1}{x'-\alpha'}=0$$

になるが，$x'=0$ は $x=\infty$ に対応するから，それを除けば，問題は

$$\sum\frac{1}{x'-\alpha'}=0 \tag{3}$$

になる．さてこれは Gauss の定理で取り扱った方程式である．

いま ξ を任意の点，x_0 を（1）の一つの根とし，ξ と x_0 とを通る任意の円周を K とするならば，一次変形（2）によって，K は x' 平面上の一つの

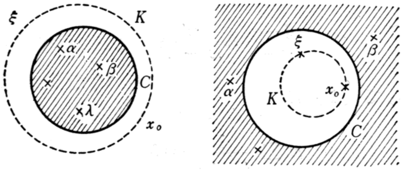


直線 K' に対応し，x_0 に対応する（3）の根 x_0' は K' の上にある．

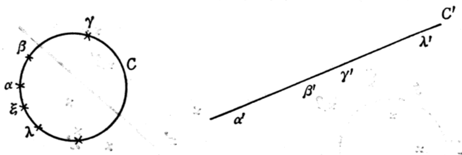
（3）は $\alpha',\beta',\cdots,\lambda'$ が K' の一側に偏在する場合には成り立ち得ないこと，Gauss の定理の証明において示したとおりである．ゆえに $\alpha',\beta',\cdots,\lambda'$ は K'，の両側に分配されるか，または全部が K' の上になければならない．x 平面に返って考えるならば，$\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ は ξ, x_0 を通る円 K の内にも外にもなければならない，または極端の場合には，全部円 K の周上になければならない．

よって $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ が円板 C に属して，ξ が C に属さないならば，（1）の根 x_0 は C に属さなければならない．もし，x_0 も C に属さないと仮定するならば，ξ と x_0 とを通ってまったく円板 C の外にある円周 K を作ること

ができて，それが $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ を分離しないことになるから，上の結果と矛盾する．



ξ または x_0 が円 C の周上にあるとしても同様であるが，ただ $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ が全部 C の周上にある場合に，ξ をも C の周上に取るときだけが例外である．この場合には $\alpha', \beta', \cdots, \lambda'$ は全部直線 K' の上にあるから（3）の根は $n-1$ 個の線分 $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma', \cdots$ の上に一つずつ分配される．したがって（1）の根は $n-1$ 個の弧 $\alpha\beta, \beta\gamma, \cdots$ の上に一つずつ分配される．



$f(z)=0$ の n 個の根 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ が円周 C を n 個の弧に分かつが，そのうち ξ を含む弧（前の図）では $\lambda\alpha$ を除いた他の $n-1$ 個の弧が（1）の根を一つずつ含むのである（ξ は x' 平面の ∞ に対応し，弧 $\alpha\lambda$ は直線 C' の線分 $\alpha'\lambda'$ 以外の部分に対応する）．

3.　等式

$$\frac{P(\xi, x)}{f(x)} = \sum \frac{\xi-\alpha}{x-\alpha}$$

は左辺の有理式の部分分数への分解である．ゆえに $f(z)$ の k 重根は $P(\xi, x)$ の $k-1$ 次の根である（約分ができて分母に $x-\alpha$ なる因数が一つだけ残る）．ただし ξ が一つの根 α に合するときには，$x-\alpha$ に関する部分分数がなくなる．すなわち，このとき $x-\alpha$ が $P(\xi, x)$ において $f(x)$ と同次以上

に含まれる.

$f(x)$ が n 次ならば, $P(\xi,x)$ は一般には $n-1$ 次であるが, $\sum(\xi-\alpha)=0$ であるときには, $n-2$ 次以下に低下する. これを $\xi\to\frac{1}{n}\sum\alpha$ なる極限の場合と見なし, 次数の低下が k ならば, $P(\xi,x)$ は ∞ なる k 次の根をもつものとする. このとき ξ は根 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ の重心であるから ξ は $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ を含む円の内部にある. ゆえに $P(\xi,x)$ の解の中に ∞ が入ってもよい.

斉次の形においては次数の低下はない. ただ x に関する $n-1$ 次以下の項が若干消失するだけである. たとえば

$$f(x,y)=x^n+y^n \text{ とすれば, } f_1=nx^{n-1},\ f_2=ny^{n-1}.$$

ゆえに $P(0,x)=n$ であるが, 斉次の形では

$$P(0,\eta\,;x,y)=n\eta y^{n-1}.$$

n 次の多項式 $f(x)$ に関するポーラー $P(\xi_1,x)$ を x の多項式として ξ_2 のポーラーを $P(\xi_1,\xi_2\,;x)$ とし, このようにしてついに k 次のポーラー $P(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k\,;x)$ に至れば, これは一般には x に関して $n-k$ 次である.

〔**問題 1**〕 $f(x)$ の根が全部円板 C に属し, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ が C の外にあれば, $P(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k\,;x)$ の根は C に属する.

〔**問題 2**〕 $P(\xi,x)$ の根 ($f(x)$ と共通でないもの) x_0 と ξ とを通る任意の円は $f(x)$ の根を内外に分離する. または $f(x)$ のすべての根を通る. $P(\xi_1,\xi,\cdots,\xi\,;x)$ に関しても同様である.

〔解〕 定理 2.12 または問題 1 の対偶.

〔**問題 3**〕 方程式

$$f(z)\equiv 1+z+a_2z^{\nu_2}+a_3z^{\nu_3}+\cdots+a_kz^{\nu_k}=0 \qquad (1)$$

$$(1<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k)$$

は, $|z|\leqq k$ の円内に根をもつ (Fejér).

〔注意〕 初項 1 のほかに k 個の項があって, 第二項は z, その他の項は係数も次数も任意である. それらの係数や次数のいかんに拘わらず, 根の最小絶対値が k を越えないといい得るところに, この定理の興味がある.

〔解〕 根の最小絶対値を r とすれば, 原方程式の根は円板 $|z|\geqq r$ に属すから

$$P(0,z)=\nu_k+(\nu_k-1)z+(\nu_k-\nu_2)a_2z^{\nu_2}+\cdots+(\nu_k-\nu_{k-1})a_{k-1}z^{\nu_{k-1}}=0 \qquad (2)$$

の根も $|z|\geqq r$ に属す．この方程式から同様にして，

$$\nu_k\cdot\nu_{k-1}+(\nu_k-1)(\nu_{k-1}-1)z+\cdots+(\nu_k-\nu_{k-2})(\nu_{k-1}-\nu_{k-2})a_{k-2}z^{\nu_{k-2}}=0 \qquad (3)$$

の根も $|z|\geqq r$ に属す．しだいにこのようにして，ついに

$$\nu_k\cdot\nu_{k-1}\cdots\nu_2+(\nu_{k-1}-1)\cdots(\nu_2-1)\cdot z=0 \qquad (4)$$

の根が $|z|\geqq r$ を満足させる．よって

$$r\leqq\frac{\nu_k\cdot\nu_{k-1}\cdot\cdots\nu_2}{(\nu_k-1)(\nu_{k-1}-1)\cdots(\nu_2-1)}.$$

さて，$\nu_k\geqq k$, $\nu_{k-1}\geqq k-1$, …から

$$\frac{\nu_k}{\nu_k-1}\leqq\frac{k}{k-1},\qquad \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-1}-1}\leqq\frac{k-1}{k-2},\ \cdots$$

したがって

$$r\leqq\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k-2}\cdots\frac{2}{1}=k.$$

$f(z)=\left(1+\dfrac{z}{k}\right)^k=1+z+\cdots$ のときには，実際 $|z|=k$ なる根があるから，上の結果において等号 = が必要である．

〔**問題 4**〕 前の問題の方程式は 0 と $-k$ とを直径の両端とする円内に根をもつ．

〔解〕 $\xi=0$ と (2) の根とを通る円は (1) の根を含む．同様に 0 と (3) の根とを通る円は (2) の根を含むから，(1) の根を含む．したがって，このように 0 と (4) の根とを直径の両端とする円は (1) の根を含む．

〔**問題 5**〕 方程式

$$1+z+az^n=0\ (n>1)$$

は $|z|\leqq 2$ という根をもつ (Landau)．また $|z+1|\leqq 1$ という根をもつ (Hurwitz)．等号 = は，前の場合には，$1+z+\dfrac{z^2}{4}$ だけに，また後の場合には，$n=2$, $a\geqq 1/4$ のときだけに限る (菅原)．

第 3 章　スツルムの問題，根の計算

§ 15.　Sturm の定理

1.　実係数をもつ方程式

$$f(x)=0$$

が与えられた区間

$$a \leqq x \leqq b$$

の中にいくつの実根をもつかを決定することを Sturm の問題という．これは古い問題であるが，1829 年に至って Sturm が初めて完全な解決を与えたのである．

この問題が解決されたとするならば，定理 2.2 に述べたように，$f(x)$ の根の絶対値の限界は知れるから（§ 19 参照），その限界を l として，区間 $-l<x<l$ における実根の数を求めると，それがすなわち実根の総数である．

この区間をしだいに細分して，その各区間における実根の数を求めるならば，ついに各 1 個ずつの実根を含む区間に達することができる．このような区間を求めることを**実根の分離**という．すなわち，任意の区間に関して Sturm の問題が解かれるならば，実根分離の問題が解かれるはずである．

1 個の実根を含む区間をさらに細分して，各区間に関して実根の数（0 または 1）を定めることができるから，この操作を継続すれば，一つの実根を含むどんなに小さな区間でも求めることができる．いま，区間 $a<x<b$ が一つの実根を含み，その区間の幅 $b-a$ がたとえば 0.001 に等しいとすれば，区間の限界 a または b をその根の近似値としてとるとき，誤差は 0.001 以下である．ゆえに Sturm の問題が解かれるならば，実根の近似的計算ができる．ここに Sturm の問題の重要性がある．

2.　Sturm の問題は Euclid の算法（最大公約数を求める互除法）によって解かれる．多項式 $f(x)$ とその導函数 $f'(x)$ とから次々に出て来る剰余の

符号を変えながら互除法を行なう．

すなわち
$$f_{h-1}(x)=q_h(x)f_h(x)-f_{h+1}(x) \tag{1}$$
$$(h=1,\ 2,\cdots,\ l-1)$$

とする．ただし便宜上 $f=f_0$, $f'=f_1$ ともしるすのである．最後の多項式 $f_l(x)$ はもちろん $f(x)$ と $f'(x)$ との最大公約数で，$f(x)=0$ が複根をもたないときに限って，それは定数 ($\neq 0$) である．

さて x のある値に対する，これらの函数
$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_l(x) \tag{2}$$
の値の符号を左から右へ見て行って，同じ符号が続くところ（記号 P）と符号が変わるところ（記号 V）とを数えて，その総数をそれぞれ $P(x)$, $V(x)$ とする．ただし（2）の値の中に 0 になるものがあれば，それは飛ばして P, V を数えるのである．この記号 $P(x)$, $V(x)$ は今後も同様の意味でしばしば用いるであろう．

このような記号を用いて Sturm の定理を次のように述べることができる．

〔定理 3.1〕（Sturm の定理） 方程式 $f(x)=0$ が
$$a<x\leqq b$$
なる区間においてもつ実根を単根複根の区別なしに（複根を一つの根として）数えて，その数を N_0 とする．

また（2）の函数列
$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_l(x) \tag{2}$$
において区間の両端 $x=a$ および $x=b$ に対する符号の変りの数を $V(a)$ および $V(b)$ とする．しからば
$$N_0=V(a)-V(b).$$

ただし，区間の一端 $x=a$ が $f(x)=0$ の k 重の複根である場合には，（2）の各函数を共通の因数 $(x-a)^{k-1}$ で割った上で $V(a)$ を求めるのである．$x=b$ に関しても同様である．

〔証〕 x が a から b まで変動する間に $V(x)$ の数に変化の生ずるのは，x が（2）のある函数を 0 にするような値を通過するときに限ることは明白で

ある（多項式の連続性）.

まず $x=x_0$ が $f(x)=0$ の根であるときに，x_0 の直前と直後とで f と f' との間において V の数が 1 個減少する．すなわち x が増大しつつ x_0 を通過するときに $f(x)f'(x)$ の符号が $-$ から $+$ 変わる．それを見るには x_0 を $f(x)$ の k 重根として（$k\geqq 1$）

$$f(x)=(x-x_0)^k\varphi(x)$$

とおけば

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{k}{x-x_0}+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

（§ 11）で，$x=x_0$ のとき $\varphi(x)$ は 0 にならないから，右辺の第 2 項 $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ は x_0 において連続で，x_0 の付近では有限な限界内に止まるのに，第 1 項 $\dfrac{k}{x-x_0}$ は x が x_0 に近づくとき，$x<x_0$ または $x>x_0$ にしたがって，$-\infty$ または $+\infty$ になる．ゆえに x が増大しつつ x_0 を通過するとき $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の符号は $-$ から $+$ に変わる．

ゆえに $f(x)$ と $f'(x)$ との間では，x_0 の直前においては符号の変りがあり，x_0 の直後では符号の変りがない．すなわち x が x_0 を通過するとき，符号の変りが 1 個減少する．

なお精密にいえば，$V(x)$ を数えるとき，函数列の中で 0 になるものは省くという規約であるから，$x=x_0$ のとき f，f' の間に符号の変りがない．すなわち x が増大しつつ x_0 に到達する瞬間に f と f' との間に符号の変りが 1 個減少するのである．

次に $x=x_0$ のとき，（2）の中間の函数 $f_h(x)$（$0<h<l$）が 0 になる場合において，もしも同時に $f_{h+1}(x)$ が 0 にならなければ，（1）によって $f_{h-1}(x)$ も 0 にならず，かつ $f_{h+1}(x_0)$ と反対の符号をもつ．ゆえに多項式の連続性によって，$x=x_0$ の直前でも，直後でも，$f_{h-1}(x)$ と $f_{h+1}(x)$ とは反対の符号をもつから，$f_h(x)$ の符号に関係なく f_{h-1}，f_h，f_{h+1} の間の符号の変りは 1 個である（$+\pm-$ または $-\pm+$）．したがって x が x_0 を通過するとき，これら三つの函数の間における符号の変りの数に増減がない．

$x=x_0$ において $f_h(x_0)$ と同時に $f_{h+1}(x_0)$ が 0 になるときには，（1）によ

って（2）の各函数が 0 になる．すなわち $x=x_0$ が $f(x)$ の複根である場合である．いま $x=x_0$ が $f(x)$ の k 重の複根であるとすれば，（2）の各函数は $(x-x_0)^{k-1}$ で割り切れる．この共通因子を取り除いた跡の函数を

$$\varphi(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{h-1}(x), \varphi_h(x), \varphi_{h+1}(x), \cdots, \varphi_l(x) \qquad (3)$$

とすれば，$x=x_0$ のときもはやこれらの函数が二つ引き続いて 0 になることはない．しかるに（1）によって

$$\varphi_{h-1}(x)=q_h(x)\varphi_h(x)-\varphi_{h+1}(x) \qquad (h=1, 2, \cdots, l-1)$$

であるから，$x=x_0$ のとき（3）の中に 0 になるものがあるとしても，x_0 の直前と直後とにおいて，φ_1 から φ_l までの間には V の増減はないことは前の通りである．共通の因子 $(x-x_0)^{k-1}$ を回復してもとの函数列（2）に返っても，x_0 の直前直後における符号の変りの数には影響はないから，$f'(x)$ から $f_l(x)$ までの間では，x_0 の直前と直後とにおいて V の数に増減はないが，ただこの場合には，初めにいった通り，f と f' との間において，V の数が 1 個減少するのである．

なお（2）の最後の函数 $f_l(x)$ が $x=x_0$ のときに 0 になるのは，すなわち x_0 が $f(x)$ の複根になる上の場合である．

よって $x=a$, $x=b$ が $f(x)$ の根でないとすれば，x が a から b まで変わるとき，$V(x)$ は x が $f(x)$ の単根または複根を通過するごとに 1 個ずつ減少するだけであるから，定理にいう通り

$$N_0=V(a)-V(b) \qquad (4)$$

である．

$x=a$ または $x=b$ が $f(x)$ の単根であるときは，上の説明によって明らかな通り $V(a)$, $V(b)$ は a または b の直後における $V(x)$ に等しいから，$V(a)-V(b)$ は a の直後から b の直後までの根の数である．それはすなわち区間

$$a<x\leqq b$$

における根の数に等しい．このように区間の左端は開放し，右端は閉鎖することにすれば，（4）がやはり成り立つのである．

ただ $x=a$ が $f(x)$ の複根であるときには, $x=a$ に対して（2）の函数が全部 0 になるから, a の直後における $V(x)$ を $V(a)$ から求めることができない. この場合には共通因子 $(x-a)^{k-1}$ または $f_l(x)$ を取り除いて $V(a)$ を求めねばならない. $x=b$ に関しても同様である.

実際に, 函数列（2）を計算することは f がやや高次でもかなりわずらわしく, また x のある値に対する（2）の値を計算することは面倒であるが, 入用なのは（2）の値その物ではなくて, ただ符号だけがわかればよいのだから,（2）の多項式の係数を近似的に求めておけば十分である. 一般的には, 計算尺を用いて各係数を 3 桁も出せばよい次に一つの例を掲げる.*

〔例〕

$$f(x)=3.22x^6+4.12x^4+3.11x^3-7.25x^2+1.88x-7.84,$$
$$f'(x)=19.32x^5+16.48x^3+9.33x^2-14.50x+1.88,$$
$$f_2\ =-1.37x^4-1.55x^3+4.8x^2-1.57x+7.84,$$
$$f_3\ =-109x^3+89.9x^2-121x+123,$$
$$f_4\ =-4.16x^2+0.15x-4.83,$$
$$f_5\ =-8.8x-23.3,$$
$$f_6\ =+34.4.$$

$x=-\infty$:	+	−	−	+	−	+	+	$V(-\infty)=4$,
$x=0$:	−	+	+	+	−	−	+	$V(0)=3$,
$x=+\infty$:	+	+	−	−	−	−	+	$V(+\infty)=2$.

ゆえに正根負根各 1 個である. $|x|\geqq 2$ という実根のないことは $f(x)$ の形を一見して知られる. よって $V(1)$, $V(-1)$ を計算すれば, 正根は区間 $(1,2)$ に, 負根は区間 $(-2,-1)$ にあることがわかる.

〔注意〕 上の例では, f_4 が常に負であるから, 函数列を f_4 で打ち切ってさしつかえない. Sturm の定理の証明に立ち返って見れば, 函数列（2）の中に問題の区間 (a,b) において一定の符号をもつものがあるとき, それを最後の函数としてよいことが知られるであろう.

§ 16. Sturm の定理の拡張

1. 一つの多項式とその導函数との代わりに任意の二つの多項式 $f(x)$, $f_1(x)$ が与えられたとき, 次数の低くないほうを $f(x)$ として, 前節と同様に次々の剰余の符号を変えながら, 互除法を行なって f, f_1 に始まる函数列

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x)\ ,\cdots,\ f_l(x) \qquad (1)$$

* Runge (Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften, I) による.

を作って $V(x)$ の増減を考察すれば，重要な結果を得る．

ここでも

$$f_{h-1}(x)=q_h(x)f_h(x)-f_{h+1}(x) \qquad (2)$$
$$(h=1,\ 2,\cdots,\ l-1)$$

であるから，$x=x_0$ という値に対して中間のある多項式が 0 になるとき，x_0 の直前と直後とにおける $V(x)$ には変化がないこと，前節と同様である．ただし $x=x_0$ のとき，二つの接続する多項式または最後の多項式が 0 になるときには，$x=x_0$ は $f(x)$ と $f_1(x)$ とに共通な根であるが，もしも $f(x)$ がちょうど $(x-x_0)^k$ で割り切れるとき，$f_1(x)$ が少なくとも $(x-x_0)^k$ で割り切れるならば，$f_2(x),\cdots,f_l(x)$ も $(x-x_0)^k$ で割り切れて，これらの函数から因数 $(x-x_0)^k$ を取り除いた商を

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_l(x) \qquad (3)$$

とすれば，x_0 の直前および直後における V は（1）においても（3）においても同一で，かつ（3）においては，$\varphi(x_0)\neq 0$ であるから，x が x_0 を通過するときに $V(x)$ に増減はない．

よって問題として残るのは $f(x)/f_1(x)$ を 0 とする $x=x_0$ の値に関して x_0 の直前直後における $f,\ f_1$ の間の符号の変りの数である．さてここに三つの場合がある．

（1） $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ は符号を変えない，すなわち $V(x)$ に増減がない．

（2） $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ は $-$ から $+$ に変わる，すなわち $V(x)$ が一つ減ずる．

（3） $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ は $+$ から $-$ に変わる，すなわち $V(x)$ が一つ増す．

これらの三つの場合の区別を見やすくするために $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ を 0 とする $x=x_0$ という値に対して，$\chi(x_0)$ を次のように定義する．

（1） の場合には　$\chi(x_0)=0,$

（2） の場合には　$\chi(x_0)=1,$

（3） の場合には　$\chi(x_0)=-1.$

このような記号を用いるならば，上の考察から次の定理が得られる.

〔**定理 3.2**〕 多項式 $f(x)$, $f_1(x)$ から作った上の（1）の多項式

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_l(x)$$

の間における符号の変りの数を $V(x)$ とし，また区間 $a<x<b$ の両端 $x=a$ および $x=b$ において f/f_1 が 0 にならないとすれば，

$$V(a)-V(b)=\sum_{x_0}\chi(x_0).$$

$\sum$ は上の区間において f/f_1 を 0 とする x の値 x_0 に関する総和である.

定理 3.1 の場合($f_1=f'$)においては，$f(x)=0$ のすべての根 x_0 が $f(x)/f'(x)$ の根で，かつ $\chi(x)=1$ であるから，$V(a)-V(b)$ が区間 $a<x<b$ 内の根の数 N_0 を与えるのである．上の一般の場合においては，$V(a)-V(b)$ は N_0 に等しいとはいえないが，

$$N_0\geqq|V(a)-V(b)|$$

であることは確かである.

2. 定理 3.2 における Sturm の定理の拡張は Euclid の算法の効果に重点をおいたのであるが，Euclid の算法をも度外視して，定理 3.2 の証明の要点のみを拾って，次のような定理を得る.

〔**定理 3.3**〕 多項式 $f(x)$ と区間 J：

$$a\leqq x\leqq b \qquad (J)$$

とが与えられたとき，次の条件を具えた多項式の一列

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_l(x)$$

が求められたとする.

（1） 区間 J において，二つの接続する多項式が同時に（x の同一の値に対して）0 にならない.

（2） 区間 J において，中間のある多項式が 0 になるとき，その x の値に対して両隣の多項式は反対の符号をもつ.

（3） 最後の多項式 $f_l(x)$ は区間 J において一定の符号をもつ.

しからば

$$V(a)-V(b)=\sum_{x_0}\chi(x_0).$$

ただし $f(x)$ は区間の両端 $x=a$, $x=b$ において 0 にならないとし（$f(a)\neq 0$, $f(b)\neq 0$），かつ x_0 は区間 J における $f(x)=0$ の根とする．$\chi(x_0)$ の意味は前と同様である．

〔**証**〕 上の三つの条件は定理 3.2 を f と f_1 とが公約数をもたない場合に証明するときに使われるすべての契点である．これらが成り立つならば，その結論ももちろん成り立つのである．

上の函数列を $f(x)$ および区間 J に関する広義における Sturm の函数列という．

3. 定理 3.2, 3.3 の例として Legendre の球函数を考察する．

$$(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1/2}=P_0+P_1r+P_2r^2+\cdots+P_nr^n+\cdots \tag{4}$$

なる無限級数において，P_n は $\cos\theta$ の多項式である．すなわち $\cos\theta=x$ とおけば，

$$P_0=1, \qquad P_1=x,$$

$$P_2=\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right), \qquad P_3=\frac{5}{2}x\left(x^2-\frac{3}{5}\right),\cdots$$

一般に

$$P_n=\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.2.3\cdots n}\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right\}.$$

この式は次の公式から数学的帰納法によって求められる．

$$nP_n-(2n-1)xP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0. \tag{5}$$

（5）は（4）を r に関して微分して得られる展開式と（4）とから，左辺の根式を追い出して容易に得られる．次の関係も帰納法によって験証される．

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{6}$$

以上は Legendre の球函数 P_n の説明である．ここでは定理 3.2 の応用の一例として，n 次の方程式

$$P_n(x)=0$$

が区間 $-1<x<1$ において n 個の実根をもつことを示すのが目的である．

公式（5）から見えるように，P_n を P_{n-1} で割るときの剰余の符号を変えて

それに正の因数$\dfrac{n}{n-1}$を掛けたものがすなわち P_{n-2} である.

ゆえに

$$P_n,\ P_{n-1},\ P_{n-2},\ \cdots,\ P_1,\ P_0$$

を定理 3.2 に挙げた函数列にすることができる. よって区間 $-1<x<1$ における根の数を求めるために, $x=\pm 1$ に対するこれらの函数の値を求めるのに幸にしてそれは容易に (4) から出る. すなわち $x=\pm 1$ のとき, (4) の左辺は $(1\mp r)^{-1}$ になるから, その展開は

$$1\pm r+r^2\pm r^3+\cdots$$

すなわち

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n.$$

ゆえに

$$V(-1)-V(1)=n-0=n.$$

$$\sum\chi(x_0)=n.$$

さて $P_n(x)$ は n 次であって, この $\sum$ は単根複根の区別なしに区間 $-1<x<1$ における $P_n(x)/P_{n-1}(x)$ の根 x_0 に関する和であるから, $\sum$ なる和における項数は n 以下である. しかるに, この和の各項は $+1$, -1, または0であって, しかも和の値が n であるから和の項数が n で, かつ和の各項が $+1$ でなければならない. 和の項数が n であることから, $P_n=0$ が区間 $-1<x<1$ において n 個の単根をもつことが知られる.

また $\chi(x_0)$ がすべて $+1$ に等しいから, P_nP_{n-1} は x が増大しながら x_0 を通過するときに, 常に $-$ から $+$ に変わる. よって x_0, x_0' $(x_0<x_0')$ を $P_n=0$ の二つの相隣れる根とするとき, x_0 の直後と x_0' の直前とにおいて P_{n-1} の符号が反対でなければならない. ゆえに $P_n=0$ の n 個の根は $P_{n-1}=0$ の $n-1$ 個の根によって隔離されなければならない.

以上の結果は公式 (6) を用いるならば Rolle の定理 (§20) から簡単に導かれるのであるが, ここではことさらに定理 3.2 の応用の一例として取り扱ったのである.

〔**問題 1**〕 定理 3.2 において $f(x)$ が n 次, $f_1(x)$ が n よりも低次で $V(-\infty)-V(\infty)=\sum\chi(x_0)=\pm n$ であるときは, $f(x)$ は n 個の実根をもつ,

それらは単根で $f_1(x)$ の根によって隔離される．したがって $f_1(x)$ は $n-1$ 次である．$\chi(x_0)$ は常に $+1$ または常に -1 であるが $f(x)$，$f_1(x)$ における最高次の項の係数を a，b とすれば，$\chi=\text{sign}(ab)$．また $f_1(x)$ も $n-1$ 個の実根をもち，それらは $f_2(x)$ の根によって分離される．f_2 以下同様である．

〔注意〕 $\text{sign}(x)$ は x の符号を示す函数記号で，

$$x \gtreqless 0 \quad \text{にしたがって} \quad \text{sign}(x)=\begin{cases} +1, \\ \ \ 0, \\ -1. \end{cases}$$

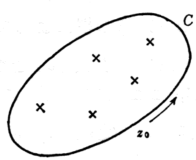
〔解〕 $f(x)$ の二つの相接する根の間に $f_1(x)$ の根が少なくとも一つずつあることは上の例と同様である．ゆえに $f_1(x)$ は $n-1$ 次である．x が $f(x)$ の最大根よりも大きくなれば，$f(x)$ は a と同符号であるが，$f_1(x)$ もまた b と同符号でなければならないから，$\chi=\text{sign}(ab)$．

〔**問題 2**〕 $f(x)$，$f_1(x)$ がともに n 次で $\Sigma\chi(x_0)=\pm n$ であるときは，それらの根は互いに隔離する．$\chi(x_0)$ は一定で，$\chi(x_0)=\text{sign}(ab)$ または $\chi(x_0)=-\text{sign}(ab)$．前の場合には，最大の実根が $f(x)$ に属し，後の場合には，$f_1(x)$ に属する．

〔解〕 この場合にも $f(x)$ の相接する二つの根の間に $f_1(x)$ の根が1個ずつある．ゆえに $f_1(x)$ は $f(x)$ の最大根よりも大きい一つの根または最小根より小さい一つの根をもたなければならない．いま x_0 を $f(x)$ の最大根とすれば，$\chi(x_0)=\pm 1$ にしたがって，$\text{sign}\, f_1(x_0)=\pm\text{sign}\, a$．ゆえに $\chi=-\text{sign}(ab)$ ならば，$\text{sign}\, f_1(x_0)=-\text{sign}\,(b)$，したがって $f_1(x)$ は x_0 よりも大きい実根をもつが，$\chi=\text{sign}(ab)$ ならば $\text{sign}\, f_1(x_0)=\text{sign}(b)$．ゆえに $f_1(x)$ は x_0 よりも大きい実根をもち得ない．

§ 17. 虚根に関する Sturm の問題

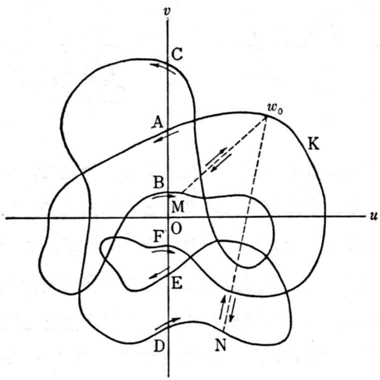
1. $f(z)=0$ を任意の方程式とし，複素数平面上において与えられた単純な閉曲線（二重点をもたない閉曲線）C の内部にあるその根の数を N とすれば，z が C の周上を正の向きに（C の内部を左に見ながら）一周するとき $\text{arc}\, f(z)$ の増加が $2\pi\times N$ であることはすでに説明した通りである（定理 2.5）．ただし C の周上には $f(z)=0$ の根はないものと仮定しなければならない．またここでは，根の数 N は複根の重複度数を数えていうのである．

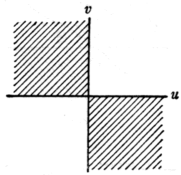


上の arc $f(z)$ の増加を求めるために，$f(z)$ を w で表わし，

$$w=u+vi$$

とおいて，z が z_0 から出発して C を一周するときに，w が w 平面上において $w_0=f(z_0)$ から出て w_0 に帰るまでの通路 K を考察する．w が描く曲線は複雑であるが，いま標本の意味で次の図に示すような曲線とする．仮定によって C の周上に $f(z)$ の根がないから，曲線 K は 0 を通らない．w が K の上を一周するときのベクトル $\overrightarrow{0w}$ の回転の純量が問題であるが，この純量を得るために，w が v 軸を横切るとき，すなわち u が 0 になる際に，uv が ＋ から － になる回数と，－ から ＋ になる回数とを数えよう．



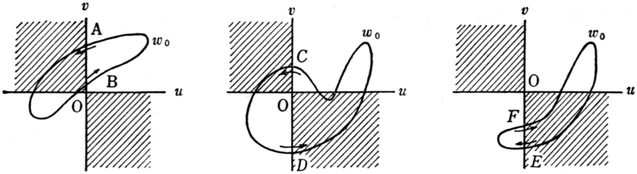


右の方の図に陰影で示すように，w平面の四つの象限の中，uv が ＋ であるところと － であるところとを白黒の二部に区別して，v 軸を関所としてwの通路を監視する．wが白から黒に入るときには白札，また黒から白へ出るときには黒札をもってそれを標記することにして，wが一周を終わったときに，白札が黒札より何枚多いかを計算して，それを π に掛けるならば，それがすなわちいま求めようとするところの回転の純量である．

上の図の場合では，K は A,B,C,D,E,F において 6 回 v 軸を横切るが，そのうち A,C,D,F が白札，B,E が黒札で，すなわち白が黒より 2 枚多いから，回転の純量は 2π である．

さて，この計算法が実際に合うことを証明しなければならないが，まずwは w_0 から出て w_0 に帰るのであるから，v 軸を横切る回数は偶数でなければな

らない．そこで証明を見やすくするために，w が v 軸を2回横切るごとに，一まず任意の経路によって出発点 w_0 へ帰らせて，その上で更に同じ経路を辿ってもとの通路に戻って進行を続けさせることにしょう．図に点線で示した Mw_0，Nw_0 がそれらの経路である．w が通路 K に属さない余計の路を通っても，それは同じ路を行ってまたかえるのであるから，$\mathrm{arc}\, w$ の増減には影響がない．ゆえに通路 K の代わりに w_0ABMw_0，w_0MCDNw_0，w_0NEFw_0 という三つの路に関する $\mathrm{arc}\, w$ の増加の総量を求めればよいことになる．さて，これらの路を単純化して描いて見れば次のようになる．



第一と第三とは v 軸を横切る2回のうち1回が白札，1回が黒札で，すなわち二つの横断点は0の同じ側にある．また第2では2回ともに白札で，すなわち二つの横断点は0の反対の側にある．そこで第一の場合であるが，この場合に限ることではないけれども，閉曲線である路上のどの点を出発帰着の点としても，回転の純量に影響はないから，w_0 の代わりに A を出発点として考えよう．そうすると，w は A を入ってから B を出るまでは，常に v 軸の左側にあるので，その間にどのような路を通ったとしても，$0w$ の回転の純量は0である．また B を出てから A に帰るまでは，常に v 軸の右側にあって，その間にも回転の純量は0で，結局一周の結果は回転量0である．第三の場合も同様である．

しかるに第二の場合には，C から D までの間に動径 $\overrightarrow{0w}$ は v 軸の正の向きから出発して後，常に v 軸の左側にあって，ついに v 軸と負の向きに来るのであるから，この間の回転の純量は $+\pi$ である．また D から C に帰るまでの間においても，回転の純量はやはり $+\pi$ である．すなわち回転の総純量は 2π である（もしも C，D がともに黒札ならば -2π）．

u が 0 になる際に uv が $-$ から $+$ に変わる場合（黒札）には $\chi=+1$ とし，uv が $+$ から $-$ に変わる場合（白札）には $\chi=-1$ とおいて，前節の記法を襲用することにする．よってまた u が 0 になる際に uv が符号を変えない場合には，$\chi=0$ とおく．この場合は，曲線 K が v 軸に触れるだけで，v 軸を横切らないで，白からただちに白へ，または黒からただちに黒へ返るのであるから，上の考察において問題にする必要がなかったのである．

このような記号を用いるならば，上の考察の結果を次のようにいい表わすことができる．

〔**定理 3.4**〕 複素数平面上において，z が単純な閉曲線 C の周上を正の向きに一周するとき，$f(z)=u+vi$ とおいて u が 0 になる各々の場合における χ の総和を $\sum\chi$ とすれば，C の内部における $f(z)=0$ の根の数 N（複根を数える）は次の式によって与えられる．

$$N=-\frac{1}{2}\sum\chi.$$

上の考察においては，u が 0 になる度数は有限と仮定したのである．後に述べる応用では，w がある変数の多項式になる場合のみを取り扱うから，さしつかえない．

〔例 1〕 最も簡単な例として

$$f(z)=z^n$$

で，C は単位円周である場合を考察する．

この場合には，$w=z^n$ が描く通路 K は何であるか．w は単位円周を正の向きに n 回回転する．よって w は v 軸を $2n$ 回横切る．それはいつも白札である．よって $\sum\chi=-2n$．したがって，（1）によって $N=n$．単位円内に $z^n=0$ の根が n 個ある．それは n 重根 $z=0$ である．

〔例 2〕 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ として，C は原点を中心とする半径 R の円周であるとする．$z=Rz'$ とすれば，z' は単位円を一周する．

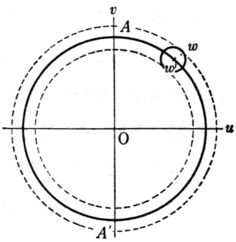
$$\frac{f(z)}{R^n}=z'^n+\frac{a_1}{R}z'^{n-1}+\frac{a_2}{R^2}z'^{n-2}+\cdots+\frac{a_n}{R^n}$$

において，ε を任意に小さい正数とするとき，R を適当に大きくとれば，$|z'|=1$ であるとき，右辺の第一項以下の絶対値を ε よりも小さくすることができる．そこで

$$\frac{f(z)}{R^n}=w,\quad z'^n=w',\qquad \frac{a_1}{R}z'^{n-1}+\cdots+\frac{a_n}{R_n}=w'' \quad \text{すなわち} \quad w=w'+w''$$

とおけば，z' が単位円周を一周するとき，w' は単位円周を n 回回転するが，$w=w'+w''$ において $|w''|<\varepsilon$ であるから w は単位円周の両側において $1\pm\varepsilon$ の半径をもつ二

つの同心円によって限られる環内において変動する. w' が単位円周上を回転するときに, w は w' から ε 以内の距離にある衛星のように運動するのである.

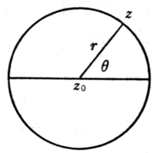


ゆえに w' が A または A' において v 軸を横切る前後において w もまた v 軸を横切るであろう. その際 w は 1 回よりも多く v 軸を横切るとしても, 結局 v 軸の一側から他側に移るのであるから, 横断の度数は奇数で, かつ白札が黒札よりも必ず1個ずつ多いのである.

ゆえに $\mathrm{arc}\, w$ の増加の純量は $\mathrm{arc}\, w'$ と同じく $2n\pi$ でなければならない. したがって $|z|=R$ なる円内において $f(z)=0$ は n 個の根をもつ. これすなわち代数学の基本定理である.

2. 曲線 C が円周である場合, または一般に C が有理曲線である場合には, 上の回転純量の計算を定理 3.2 に帰させることができる. 有理曲線とは, その曲線上の点の座標 (x, y) が一つの変数 t の有理函数として表わされるものをいうのである.

いま C を $z_0=a+bi$ を中心とする半径 r の円周とすれば, $z=x+yi$ において



$$x=a+r\cos\theta=a+r\frac{t^2-1}{t^2+1},\qquad \left(t=-\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y=b+r\sin\theta=b-r\frac{2t}{t^2+1},$$

すなわち

$$z=z_0+r\frac{t^2-1-2ti}{t^2+1} \tag{2}$$

とおけば実変数 t が $-\infty$ から ∞ まで変わるとき, z は円周 C を正の向きに一周する. これを $f(z)$ に代入して, 実の部分と虚の部分とを分けて

$$f(z)=\frac{\Phi(t)+i\Psi(t)}{(t^2+1)^n}$$

とする. n は $f(z)$ の次数で, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ は t に関して $2n$ 次の多項式である. 前に u, v で表わしたものは

$$u=\frac{\Phi(t)}{(t^2+1)^n},\qquad v=\frac{\Psi(t)}{(t^2+1)^n}.$$

さて t^2+1 は常に正であるから，問題は $\Phi(t)$ が 0 になるとき，$\Phi(t)\Psi(t)$ が − から + に変わる回数と，+ から − に変わる回数との差引勘定である．ゆえに $\Phi(t)=0$ の実根を t_0 とすれば，定理 3.2 から

$$V(-\infty)-V(\infty)=\sum_{t_0}\chi(t_0).$$

よって定理 3.4 から

$$N=\frac{V(\infty)-V(-\infty)}{2}. \tag{3}$$

V は多項式 Φ, Ψ から § 15 のように互除法によって求められる函数列における符号の変りの数で，N は円 C の内部にある $f(z)=0$ の根の数（複根の次数を数えて）である．

上の Φ, Ψ は $2n$ 次の多項式であるが，少し解法を変更して n 次の多項式ですませることができる．

（2）の右辺の分数を約して

$$z=z_0+r\frac{t-i}{t+i}.$$

これを $f(z)$ に代入して

$$f(z)=\frac{\varphi(t)+i\psi(t)}{(t+i)^n}$$

とすれば，$\varphi(t)$, $\psi(t)$ は n 次の多項式である．z が C の周上を一周するとき，$\operatorname{arc} f(z)$ の増加はすなわち t が $-\infty$ から $+\infty$ まで変わるとき，右辺の数の arc の増加で，分母 $(t+i)^n$ の arc の増加は $-n\pi$ であるから，arc $\{\varphi(t)+i\psi(t)\}$ の増加を求めることに帰す．それに $n\pi$ を加えて（$-n\pi$ を引いて）$\operatorname{arc} f(z)$ の増加が得られる．

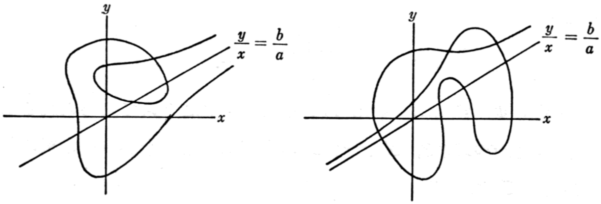
$\operatorname{arc}\{\varphi(t)+i\psi(t)\}$ の増加は $\varphi(t)$, $\psi(t)$ に関して記号 χ' を前と同様の意味に用いるならば，$-\sum\chi'\cdot\pi$ に等しい．

この場合に，$w=\varphi+i\psi$ の描く曲線は閉曲線ではない．

$$\varphi(t)=at^n+\cdots, \qquad \psi(t)=bt^n+\cdots$$

とすれば，$t=\pm\infty$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{0w}$ は直線 $y/x=b/a$ の上に来る．n が

偶数ならば，$\overrightarrow{0w}$ の方向は，$t=-\infty$ のとき，$t=+\infty$ のときと同一になるから，$\overrightarrow{0w}$ の回転の総量は π の偶数倍であるが，n が奇数ならば，$\overrightarrow{0w}$ の方向は，$t=-\infty$ のときと，$t=+\infty$ のときと反対になるから，$\overrightarrow{0w}$ の回転の総量は π の奇数倍である．



$\varphi+i\psi$ の描く通路が閉曲線でなくても，上の1の曲線 K に関する考察は，そのまま適用されるのである．

よって $\varphi(t)$，$\psi(t)$ に定理 3.2 を適用して，符号の変りを V で表わすならば

$$V(-\infty)-V(\infty)=\sum\chi'.$$

したがって

$$N\cdot 2\pi=(-\sum\chi'+n)\pi$$

から

$$N=\frac{V(\infty)-V(-\infty)+n}{2} \qquad (4)$$

を得る．

上の考察は実数軸の両側における根の数に関しても適用される．

〔**定理 3.5**〕 n 次の多項式 $f(z)$ の係数の実数部と虚数部とを分離して

$$f(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$$

とおく．実数軸の上側および下側にある $f(z)$ の根の数を（複根を数えて）それぞれ N, N' とし，$\varphi(z)$，$\psi(z)$ から互除法によって得られる函数列から V を求めるならば，

$$N=\frac{1}{2}\{n+V(\infty)-V(-\infty)\},\quad N'=\frac{1}{2}\{n+V(-\infty)-V(\infty)\}. \quad (5)$$

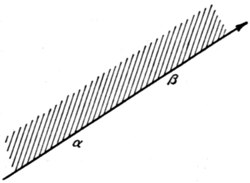
ただし，$f(z)$ は実根をもたないと仮定する．実根は $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ との共通根として求められるから，それを取り除いておくのである．

〔証〕 この場合，ベクトル $0w$ の回転の総量 $-\sum\chi\pi$ は $(N-N')\pi$ に等しいから，$N-N'=V(\infty)-V(-\infty)$．これと $N+N'=n$ とから，(5) を得る．

任意の直線，たとえば α，β を通る直線は

$$z=\alpha+(\beta-\alpha)t$$

によって実数軸に変換される．



そこで $f(\alpha+(\beta-\alpha)t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ とおいて，上の定理を適用すれば，この直線の両側における根の数が得られる．ただし，N は α から β への向きに関して，直線の左側にある根の数である．

〔例 1〕 § 15.（85 頁）に掲げた例において，$z=it$ とすれば

$$\varphi=-3.22t^6+4.12t^4+7.25t^2-7.84,\qquad \psi=-3.11t^3+1.88t,$$
$$\psi_1=-8.56t^2+7.84,\qquad \psi_2=+0.97t,$$
$$\psi_3=-7.84.$$
$$V(-\infty)=2,\quad V(\infty)=2,\quad N=N'=3.$$

すなわち虚数軸の両側に三つずつの根がある．正根と負根とは各一つずつであったのだから（参照 85 頁），実数部が正なる虚根と負なる虚根とが一組ずつある．

〔例 2〕 $f(z)=0$ の根が全部実数軸の一側にあるときには，$\varphi(z)=0$，$\psi(z)=0$ の根は全部実根で，互いに隔離する．逆も成り立つ．

〔解〕 これは § 12. に述べた Hermite の定理およびその逆である．§ 12. では，初等の方法で証明をしたが，定理 3.5 を応用すれば，証明は簡単である．すなわち次の通り．

まず $f(z)$ の根がすべて実数軸の上側にあるならば，$N=n$（n はもちろん $f(z)$ の次数である）．ゆえに $V(\infty)-V(-\infty)=n$．したがって φ，ψ に関して $\sum\chi=-n$．ゆえに $\varphi=0$ の各根に関して $\chi=-1$．ゆえに $\varphi=0$ は n 個の実根をもち，かつ ψ の実根によって隔離される．

逆に φ,ψ の根が全部実根で，かつ互いに隔離するならば，$\varphi=0$ の各根に関して $\chi=+1$ または $\chi=-1$，したがって $\sum\chi=\pm n$，ゆえに $V(\infty)-V(-\infty)=\mp n$．したがって $N=0$ または $N=n$（§16，問題 1，2 参照）．

〔例 3〕（Hurwitz の問題）実係数の方程式 $f(x)=0$ の根が全部虚数軸の左側にあるための条件は何か．

この問題は 1895 年にスイスのある水力発電所の設計に際して必要を生じて，ある技師の依頼によって Hurwitz が解いたのであるが，それよりも前に，すでに Routh がある力学上の問題に関係して解決したものである．

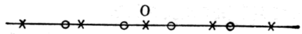
この問題は $x=iz$ とおけば，Hermite の問題（例 2）に帰する．x の実数部が負であるとき，z の虚数部は正になるから，$f(iz)=0$ の根が全部実数軸の上側にあるための条件を求めるのである．いま

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

とすれば，$f(iz)=U(z)+iV(z)$ とおくとき

$$U(z)=a_0-a_2z^2+a_4z^4-\cdots,\qquad V(z)=z(a_1-a_3z^2+a_5z^4-\cdots).$$

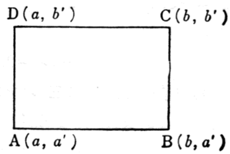
条件はこの U, V に関して $\sum\chi=-n$ になることである．ただし U, V が z の偶数冪または奇数冪だけを含むから，



$$u(x)=a_0-a_2x+a_4x^2-\cdots,\qquad v(x)=a_1-a_3x+a_5x^2-\cdots,$$

とおいて，問題を簡約することができる．すなわち $u(x)$，$v(x)$ の根は全部正数で，互いに隔離し，かつ最小根は $u(x)$ に属し，また $u(x)$，$v(x)$ に関して常に $\chi=-1$ であることが条件である．後文（§ 74.）で再びこの問題に立ち返るであろう．

〔例 4〕 C が二つ以上の有理曲線の断片を接合したものであるときにも，上の方法を適用することができる．たとえば C が右の図に示すように，軸に平行な辺をもった矩形であるとすれば，その各辺に応じて四組の φ, ψ を要する．すなわち辺 AB に関しては



$$f(x+a'i)=\varphi_1(x)+i\psi_1(x)\qquad(a\leqq x\leqq b)$$

として，この φ_1, ψ_1 と区間 $a\leqq x\leqq b$ とに関して

$$V_1(a)-V_1(b)=\sum\nolimits_1\chi$$

を求める．次に辺 BC に関しては

$$f(b+yi)=\varphi_2(y)+i\psi_2(y)\qquad(a'\leqq y\leqq b')$$

に対して

$$V_2(a')-V_2(b')=\sum\nolimits_2\chi$$

を求める．同じようにして辺 CD，DA に関しては

$$f(x+b'i)=\varphi_3(x)+i\psi_3(x),\qquad(a\leqq x\leqq b),$$
$$f(a+yi)=\varphi_4(y)+i\psi_4(y),\qquad(a'\leqq y\leqq b')$$

とするのであるが，進行の方向が逆になるから，

$$V_3(b)-V_3(a)=-\sum\nolimits_3\chi\qquad V_4(b')-V_4(a')=-\sum\nolimits_4\chi$$

よって，矩形内に含まれる根の数 N は

$$N=\frac{1}{2}\left(-\sum_1-\sum_2+\sum_3+\sum_4\right).$$

§ 18. Fourier, Laguerre の定理，Descartes の符号律

1. 本節では，Sturm の問題に関する二，三の古典的定理について述べる．まず Fourier の定理から始める．

これは Sturm の問題の解としては不完全ながら，歴史的興味のために当分の間方程式論の講義で黙殺しがたいものである．

〔注意〕 本節では，根の数は複根の次数を数えていう．

〔**定理 3.6**〕 実係数の多項式 $f(x)$ が区間

$$a<x\leqq b$$

においてもつ実根の数を N とする．$f(x)$ およびその導函数

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x)$$

における符号の変りの数を V で表わせば，

$$N=V(a)-V(b)-2h.$$

$2h$ は 0 または正の偶数を示す．

〔**証**〕 $x=x_0$ を $f(x)$ の k 次の根とすれば，x が増大しつつ x_0 を通過するとき，$f(x)f'(x)$，$f'(x)f''(x)$，$\cdots$，$f^{(k-1)}(x)f^{(k)}(x)$ の符号は $-$ から $+$ に変わるから，x_0 の直前において $f,\ f',\cdots,\ f^{(k)}$ の間に符号の変りが k 個あり，x_0 の直後においては，符号の変りがなくなる．そのために $V(x)$ が k 個減少する．

次に $x=x_0$ が $f(x)$ の根でなくて，ある導函数 $f^{(h)}(x)$ の根であるとする．

x_0 の次数 k が偶数であるとき，$f^{(h+k)}(x_0)$ の符号を σ とすれば，x_0 の直前と直後とにおける $f^{(h-1)}$ から $f^{(h+k)}$ までの間の符号の配布が次のようになる．

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k-1)}$	$f^{(h+k)}$
直　前	$\pm$	σ	$-\sigma$	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直　後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

$f^{(h-1)}(x_0)$ の符号に関係なく，x が x_0 を通過するとき（x が x_0 に到達する瞬間に），符号の変りが k 個減少する.

x_0 の次数が奇数であるときには，その次数を k' とすれば，符号の配布は次のようになる.

	$f^{(h-1)}$	$f^{(h)}$	$f^{(h+1)}$	$\cdots$	$f^{(h+k'-1)}$	$f^{(h+k')}$
直前	$\pm$	$-\sigma$	σ	$\cdots$	$-\sigma$	σ
x_0	$\pm$	0	0	$\cdots$	0	σ
直後	$\pm$	σ	σ	$\cdots$	σ	σ

ゆえに $f^{(h-1)}(x)$ と $f^{(h+k')}(x_0)$ との符号（±1 と σ）が同じであるときには $k'+1$，反対であるときには $k'-1$ だけ符号の変りが減少する.

ゆえに x が a から b まで増大するとき，符号の変りの減少は

$$V(a)-V(b)=N+\sum k+\sum(k'\pm1).$$

k は導函数の根の偶数次のものの次数，k' は奇数次のものの次数で，$k'\pm1$ における ±1 の意味は上の通り．また $\sum$ は区間 $a<x\leqq b$ における導函数のみの根に関する和を示す．区間の左端は開放し，右端は閉鎖することは Hurwitz の指摘したところで，その理由は § 15.（84頁）に述べた通りである.

さて，$\sum k$，$\sum(k'\pm1)$ は偶数（$k'-1$ は 0 でもあり得る）であるから

$$N=V(a)-V(b)-2h.$$

〔注意〕 特に $V(-\infty)=n$，$V(+\infty)=0$．ゆえに Fourier の定理によって実根の総数を求めるならば，$n-2h$ を得る．これは当然で，$2h$ は虚根の数である．しかし上の証明によれば，虚根の数は区間（$-\infty$，∞）における

$$\sum k+\sum(k'\pm1)$$

に等しい．ゆえにある区間において，実根の数が $V(a)-V(b)$ よりも少ないならば，$f(x)$ は少なくとも，その差だけの虚根をもつ．対偶をいえば，$f(x)$ が虚根をもたないときには，$V(a)-V(b)$ はいかなる区間においても，実根の数の正しい値である.

〔**問題 1**〕 区間 $a<x\leqq b$ における $f^{(r)}(x)$ の根の数を $N^{(r)}$ とし，f から $f^{(r)}$ までの間の符号の変りの数を $V^{(r)}$ とすれば

$$N-N^{(r)}=V^{(r)}(a)-V^{(r)}(b)-2h^{(r)},\quad h^{(r)}\geqq 0.$$

〔解〕 $f^{(r)},\cdots,f^{(n)}$ の間の符号の変りを V' とすれば

$$N=V(a)-V(b)-2h,\qquad N^{(r)}=V'(a)-V'(b)-2h'$$

$2h'$ は f に関する $\sum k+\sum(k'\pm 1)$ の一部であるから，$h\geqq h'$．また $V-V'=V^{(r)}$ であるから，引いて上の結果を得る．$h^{(r)}=h-h'\geqq 0$.

2. 〔**定理 3.7**〕 (Descartes の符号律) 実係数をもつ多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

の係数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ の符号の変りの数 (0 になるものは飛ばして数える) を W とすれば，$f(x)$ の正根 (0 を入れない) の数は W またはそれよりも偶数だけ少ない．

〔**証**〕 Fourier の定理における $V(0)$ がすなわち W で，$V(\infty)=0$ であるから．

〔注意〕 Descartes の符号律は正根の数の正しい値を与えないかも知れないが，適用が簡単であるところが重宝である．

$f(x)$ の負根の数は $f(-x)$ の正根の数に等しい．

〔**問題 2**〕 係数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ の中に偶数個 (k) 引続いて 0 になるところがあれば，$f(x)$ は少なくとも k 個の虚根をもつ．また奇数個 (k') 引き続いて 0 になるところがあれば，それらを挟む二つの係数が同符号であるか，または異符号であるかに従って少なくとも $k'\pm 1$ 個の虚根がある．

〔解〕 これらは Fourier の定理における $\sum k+\sum(k'\pm 1)$ の $x=0$ に関する部分である．

3. 前文で Fourier の定理から特別の場合として Descartes の符号律を導いたが，歴史的には Descartes の符号律は Fourier の定理に先だって，まったく別種の方法によって証明されたのである．その証明法を応用して，Laguerre が根の分離に関する興味ある次の定理を得た．

〔**定理 3.8**〕 実方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根の中で，与えられた正数 α よりも大きいものの数を N とすれば，N は

$$f_k(\alpha)=a_0\alpha^k+a_1\alpha^{k-1}+\cdots+a_k,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

の間の符号変化の数に等しいか，またはそれよりも偶数だけ少ない．ただし，$f(\alpha)\neq 0$ と仮定する．

あるいは根の逆数を考えて，定理を次のように変形することができる．

実方程式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

が区間 $0<x<r$ においてもつ根の数は

$$a_0,\ a_0+a_1r,\ a_0+a_1r+a_2r^2,\cdots,\ a_0+a_1r+\cdots+a_nr^n$$

の間の符号の変りの数に等しいか，またはそれよりも偶数だけ少ない．ただし $r>0,\ f(r)\neq 0$.

$x=0$ が根でも，それは区間に入らないから，$a_0\neq 0$ と仮定してさしつかえない．

〔**証**〕 α よりも大きい根がないとすれば，$f(\alpha)=f_n(\alpha)$ と $a_0=f_0(\alpha)$ とは同符号であるから，符号変化の数 V は偶数である，すなわち $N=0$ のとき，定理は正しい．よって，帰納法を用いて，定理が $N=m$ のときに正しいと仮定すれば，$N=m+1$ のときにも正しいことを証明する．

そこで，$\lambda>\alpha$,

$$g(x)=f(x)(x-\lambda)=b_0x^{n+1}+b_1x^n+\cdots+b_{n+1}\tag{1}$$

とおいて，

$$g_k(\alpha)=\sum_{r=0}^{k}b_r\alpha^{k-r},\qquad k=0,\ 1,\cdots,\ n+1$$

の符号変化の数を V' として，$V'-V$ が正の奇数であることを示そう．

さて，(1) から

$$b_0=a_0,\cdots,\ b_i=a_i-\lambda a_{i-1},\cdots,\ b_{n+1}=-\lambda a_n.$$

ゆえに

$$g_0(\alpha)=f_0(\alpha),\qquad g_i(\alpha)=f_i(\alpha)-\lambda f_{i-1}(\alpha),\ (i=1,2,\cdots,n)$$
$$g_{n+1}(\alpha)=-(\lambda-\alpha)f_n(\alpha)$$

で，仮定によって $\lambda-\alpha>0$. いま，簡明のために

$$f_i(\alpha)=p_i, \qquad g_i(\alpha)=q_i, \qquad \lambda-\alpha=\lambda'$$

と書く．すなわち

$$q_0=p_0,\ q_1=p_1-\lambda p_0, \cdots,\ q_n=p_n-\lambda p_{n-1},\ q_{n+1}=-\lambda' p_n$$

で，V は $p_0, p_1, \cdots, p_n$ の符号変化の数，V' は $q_0, q_1, \cdots, q_{n+1}$ の符号変化の数である．さて，p の方で，符号変化の起こった項を順次に

$$p_i,\ p_j,\ \cdots,\ p_k$$

とする．しからば，p_{i-1} は p_i と反対の符号（または 0）で，$\lambda>0$ だから，q_i は p_i と同符号，したがって $q_0=p_0$ と反対の符号をもつから，q_0 から q_i までの間には，少なくとも 1 個，一般には奇数個（$1+2n_1$）の符号変化がある．同じように，q_i は p_i と同符号，q_j は p_j と同符号で，p_i と p_j とは反対の符号をもつから，q_i と q_j も反対の符号をもち，q_i と q_j との間に少なくとも 1 個，一般には奇数個（$1+2n_2$）の符号変化がある．以下同様であるが，最後に，q_k は p_k と同符号で，p の方は p_k 以下 p_n まで同符号であるが，q の方は最後の q_{n+1} が p_n と反対の符号，したがって q_k と反対の符号をもつから，q_k と q_{n+1} との間に，少なくとも 1 個，一般には奇数個（$1+2n_{V+1}$）の符号変化がある．すなわち

$$V'=(1+2n_1+1+2n_2+\cdots+1+2n_V)+1+2n_{V+1}$$

$$=V+2\sum_{i=1}^{V} n_i+1+2n_{V+1}$$

$$=V+1+2n', \qquad n'\geqq 0$$

ゆえに $V'-V=1+2n'\geqq 1$ で，それは奇数である．（証終）

Fourier の定理を応用すれば，α よりも大きい根の数は

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha), \cdots,\ f^{(n)}(\alpha)$$

からも求められるが，Laguerre の定理の長所は実際計算上の便利にある．Laguerre の定理にあげてある $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)$ は

$$f_0=a_0,\ f_1=\alpha f_0+a_1,\ f_2=\alpha f_1+a_2, \cdots,\ f_n=\alpha f_{n-1}+a_n$$

によって次々に計算されるから，計算に無駄がない．実際計算において，

$x=\alpha$ に対する $f(\alpha)$ すなわち $f_n(\alpha)$ を求めるには，この方法（いわゆる Horner 式）によるのが便利である．$f_0(\alpha)$，$f_1(\alpha)$，…，$f_{n-1}(\alpha)$ は $f(x)$ を $x-\alpha$ で割るときの整商の係数である（§ 7）．

次の例は Laguerre のあげたものである．

〔例〕 $f(x)=x^5-3x^3+x^2-8x-10.$

$x=3$ のとき，符号の変りがないから，3 よりも大きい根はない．

$x=2$ のとき，符号の変りが1であるから，2 よりも大きい根が1個ある．それはもちろん区間 (2,3) に含まれる．

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	$f_5=f$	V
1	1	1	-2	-1	-9	-19	1
2	1	2	1	3	-2	-14	1
3	1	3	6	19	49	137	0

$x=1$ よりも大きい根も 1 個であるから，区間 (1,2) には根がない．

Descartes の符号律によれば，正根の数は 3 以下である．ゆえに区間 (0,1) に二つの正根があるか否かが問題になる．それを見るために　x に $\dfrac{1}{x}$ を代入すれば，

$$10x^5+8x^4-x^3+3x^2-1=0.$$

$x=1$ として上のように計算すれば

$$10,\quad 18,\quad 17,\quad 20,\quad 20,\quad 19$$

を得て，符号の変りがないから，変形後の方程式は 1 よりも大きい正根をもたない．したがって原方程式は区間 (0,1) において根をもたない．

ゆえに正根はただ 1 個で，区間 (2,3) に含まれる．

x に $-x$ を代入して同様の計算を行なえば，原方程式が区間 $(-3,-2)$ と $(-1,\ 0)$ とに一つずつの負根をもつことがわかり，実根の分離が完成する．

これは都合のよい例には相違ないが，計算は至極簡単である．

§ 19.　根　の　限　界

1．根の分離をするのには，根の限界を求めることが重要である．すべての根が絶対値において r を越えないとき，r を根の限界というのである．

〔問題 1〕 方程式（任意係数）

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (1)$$

の根の一つの限界が

$$r^n-|a_1|r^{n-1}-|a_2|r^{n-2}-\cdots-|a_n|=0 \qquad (2)$$

のただ一つの正根 r_0 によって与えられる.

〔解〕 Descartes の符号律によって (2) は一つの正根をもつ. それを r_0 とすれば, $r>r_0$ のとき, (2) の左辺は正である. ゆえに $|z|>r_0$ とすれば,

$$|z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|\geqq|z^n|-(|a_1z^{n-1}|+|a_2z^{n-2}|+\cdots+|a_n|)>0.$$

〔注意〕 上の式で $\geqq$ のところ, 一般には等号は成り立たないから, $|z|=r_0$ なる根もないが, ただきわめて特別な例外の場合がある. それは

$$\mathrm{arc}\, z^n+\pi=\mathrm{arc}\, a_1z^{n-1}=\mathrm{arc}\, a_2z^{n-2}=\cdots=\mathrm{arc}\, a_n$$

であるときである. そのとき $\mathrm{arc}\, z=\theta$ とすれば

$$\mathrm{arc}\, a_1=\pi+\theta,\ \mathrm{arc}\, a_2=\pi+2\theta, \cdots,\ \mathrm{arc}\, a_n=\pi+n\theta.$$

ゆえに $\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ とすれば

$$a_1=-|a_1|\omega,\ a_2=-|a_2|\omega^2,\ \cdots,\ a_n=-|a_n|\omega^n.$$

そこで $z=r_0\omega$ を原方程式に代入すれば, ω^n で割った後

$$r_0{}^n-|a_1|r_0{}^{n-1}-|a_2|r_0{}^{n-2}-\cdots-|a_n|=0.$$

すなわち $z=r_0\omega$ が根である. ゆえに $|z|=r_0$ なる根があっても, それはただ一つである.

〔**問題 2**〕 方程式 (1) において係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の最大絶対値を M とすれば, $1+M$ が根の限界である.

〔解〕 $r>1+M$ とすれば

$$\frac{|a_1|}{r}+\frac{|a_2|}{r^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{r^n}<M\left(\frac{1}{1+M}+\frac{1}{(1+M)^2}+\cdots\right)=1 \qquad (3)$$

ゆえに (2) の左辺は正. したがって $r_0<1+M$.

〔注意〕 (1) において z^n の係数が 1 にしてあることに注意を要する.

〔**問題 3**〕 方程式 (1) において

$$\mathrm{Max}(n|a_1|,\ \sqrt{n|a_2|},\ \sqrt[3]{n|a_3|},\ \cdots,\ \sqrt[n]{n|a_n|})$$

が根の限界である.

〔注意〕 $\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_m$ の中の最大値を表わす.

〔解〕 この最大値を G とすれば, $r>G$ のとき (3) の左辺の各項が $\dfrac{1}{n}$ よりも小になる.

〔**問題 4**〕 実係数の方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

において, 負の係数は k 個あるとして, それらは $a_\alpha,\ a_\beta,\ a_\gamma, \cdots$ とすれば

$$\mathrm{Max}(\sqrt[\alpha]{k|a_\alpha|},\ \sqrt[\beta]{k|a_\beta|},\ \sqrt[\gamma]{k|a_\gamma|}, \cdots)$$

が正根の限界である．

〔解〕 この最大絶対値を G とすれば，$x>G$ のとき

$$1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}>0.$$

各負項の絶対値が $\frac{1}{k}$ よりも小さくて，すべて負項を合わせても，絶対値が 1 にすら達しないから．

〔**問題 5**〕 実方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0, \qquad a_0>0$$

において，a_ν が最初の負係数で，すべての負係数の最大絶対値が N ならば

$$1+\sqrt[\nu-k]{\frac{N}{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k}} \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \nu-1)$$

が正根の限界である．

特に $k=0$, $k=\nu-1$ とすれば， $1+\sqrt[\nu]{\frac{N}{a_0}}$ または $1+\frac{N}{a_0+a_1+\cdots+a_{\nu-1}}$ が正根の限界である．

〔解〕 正項は控え目に，負項は余計に書けば，$(x>1)$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x^{n-\nu}}&>(a_0+a_1+\cdots+a_k)x^{\nu-k}-N\left(1+\frac{1}{x}+\cdots\right)\\&=(a_0+a_1+\cdots+a_k)x^{\nu-k}-\frac{Nx}{x-1}\\&=\{(a_0+a_1+\cdots+a_k)x^{\nu-k-1}(x-1)-N\}\frac{x}{x-1}\\&>\{(a_0+a_1+\cdots+a_k)(x-1)^{\nu-k}-N\}\frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

ゆえに $x-1>\sqrt[\nu-k]{\frac{N}{a_0+a_1+\cdots+a_k}}$ とすれば，$f(x)>0$.

〔注意〕 上の限界 $1+\frac{N}{a_0+a_1+\cdots+a_{\nu-1}}$ よりは，一般に次の限界がよい．すなわち各負係数を，それに先だつ正係数の和で割った商の最大値に 1 を加えたものが，正根の限界である．

たとえば $f(x)=ax^5+bx^3-cx^2+dx-e$, $(a,b,c,d,e>0)$ において，$x>1$ とすれば，

$$\begin{aligned}f(x)&=ax^5+bx^3-cx^2+dx-e=(x-1)\{ax^4+ax^3+(a+b)x^2+(a+b)x+(a+b+d)\}\\&\quad+a+b+d-cx^2-e>\{(a+b)(x-1)-c\}x^2+\{(a+b+d)(x-1)-e\}.\end{aligned}$$

ゆえに $x-1>\frac{c}{a+b}$, $x-1>\frac{e}{a+b+d}$ であるとき，$f(x)>0$.

問題 1～5 を § 15. (85 頁) に掲げた

$$f(x)=3.22x^6+4.12x^4+3.11x^3-7.25x^2+1.88x-7.84$$

に応用して見る（四桁対数表または計算尺を使用）．

根の絶対値の限界として，問題 2 からは $1+\dfrac{7.84}{3.22}=3.5$ を得る．また問題 3 から $\sqrt{\dfrac{6\times 4.12}{3.22}}=2.8$ を得る．しかし

$$3.22|x|^6>7.84\frac{|x|^5-1}{|x|-1},\quad \text{いわんや}\quad 3.22|x|^6>7.84\frac{|x|^5}{|x|-1}$$

ならば，$|f(x)|>0$ である．すなわち $|x|(|x|-1)>\dfrac{7.84}{3.22}=2.43$．これは $|x|\geqq 2.2$ のときに成り立つから，2.2 が根の絶対値の限界である．

次に正根の限界としては，問題 4 から $\sqrt[4]{\dfrac{2\times 7.25}{3.22}}=1.5$，問題 5 から $1+\sqrt[4]{\dfrac{7.84}{3.22}}=2.3$，同じく注意から $1+\dfrac{7.25}{3.22+4.12+3.11}=1.7$ を得る．しかし，$f(x)=(3.22x^6-7.84)+(4.12x^2+3.11x-7.25)x^2+1.88x$ で，第一の括弧は $x>\sqrt[6]{\dfrac{7.84}{3.22}}=1.16$ のとき正になり，第二の括弧は $x>1.01$ でもすでに正になるから，正根の限界として 1.16 を取ってよい．

〔**問題 6**〕 実方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

において，$a_0>a_1>a_2>\cdots>a_n>0$ ならば，根の絶対値は 1 よりも小さい（掛谷の定理）．

〔解〕 $(x-1)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0x^{n+1}-(a_0-a_1)x^n-\cdots-(a_{n-1}-a_n)x-a_n$．この積に問題 1 を応用する．そのとき，$r_0=1$．$x=1$ は原方程式に適しない（問題 1 注意参照）．

〔**問題 7**〕 実方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

において，係数が同符号（正とする）ならば，根は $r\leqq|x|\leqq r'$ なる円輪内にある．ただし r，r' はそれぞれ

$$\frac{a_1}{a_0},\quad \frac{a_2}{a_1},\quad \cdots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

の中の最小値および最大値である．

〔解〕 $x=rx'$ または $x=r'x'$ とおいて方程式を変形すれば係数が単調に増大または減少するようになる．そこで前の問題を応用する．

§ 20.　根の近似的計算，微分法の定理

1.　根の近似的計算は，理論上 Sturm の定理によって解決されているけれども，実際問題としては，計算の手数を節約する方法を講ずることが重要である．ここでは，その詳細に立ち入ることはできないが，標本として Newton の方法を略説する．Newton が当時新発見の微分法を応用して，方程式の近似的解法に画期的の一生面を開いたのである．まずこの方法の根拠として必要な二，三の定理から始める．それらは微分法で説明される一般的の定理であるが，ここではなるべく多項式に即して取り扱うことにする．

以下本節では $f(x)$ などで表わす函数は実係数をもつ多項式とする．

2.　〔**Bolzano の定理**〕　区間 $a<x<b$ の両端において $f(x)$ の値が反対の符号をもつとき，$f(x)$ はこの区間内に根をもつ．

〔**証**〕　$a=0$, $b=1$, $f(0)<0$, $f(1)>0$ として，区間 $(0,1)$ を考察する．一般の場合も同様であるが，それは $x'=\dfrac{x-a}{b-a}$ なる変換によって，この場合に帰する．

区間 $(0,1)$ を10分して 0, 0.1, 0.2, …, 0.9, 1 に対する $f(x)$ の値を次々に見て行く．もしも，それらの値の中に0なるものがあるならば，問題は解決されたのである．そうでないときには，たとえば $f(0.4)<0$, $f(0.5)>0$ のように，$f(x)$ が左端では負，右端では正になる区間が必ずあるであろう．次にその区間 $(0.4, 0.5)$ を10分して，0.4, 0.41, …, 0.49, 0.5 に対する $f(x)$ の値を見れば，$f(x)$ の根が得られるか，あるいは $(0.42, 0.43)$ のような区間で，左端では $f(x)$ が負，右端では正になるものが得られる．このような操作を続行するならば，$0.a_1a_2\cdots a_n$ のような有限十進小数として $f(x)$ の根が得られるか，あるいは $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ なる無限十進小数があって，その $\dfrac{1}{10^n}$ の位より下を切り捨て，または切り上げて得られる数を両端とする，幅が $\dfrac{1}{10^n}$ である区間の左端において $f(x)$ が負になり，右端において $f(x)$ が正になる．n は随意であるから，x_0 を含んでいくらでも狭い区間において $f(x)$ の

符号が $-$ にも $+$ にもなるのである．ゆえに多項式の連続性によって $f(x_0)=0$ である．なぜならば，もしも $f(x_0)$ がたとえば正であるとするならば，$|x-x_0|$ が十分小さい間は，$f(x)$ は正でなければならないから，それは矛盾である．

この証明は，根の近似値を求めることの可能性を示すものである．

3.　根の存在が確定した上は次の定理が得られる．

区間 (a, b) の両端において $f(x)$ の値が同じ符号をもつか，または反対の符号をもつかにしたがって，この区間内における根の数は偶数（0 をも入れていう）または奇数である．

実際区間内にあるすべての根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ として

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\varphi(x)$$

とおけば，$\varphi(x)$ は区間 (a, b) において根をもたない．ゆえに Bolzano の定理（対偶）によって，$\varphi(a)$，$\varphi(b)$ は同符号である．その符号を σ とすれば $\operatorname{sign} f(a)=(-1)^k\sigma$，$\operatorname{sign} f(b)=\sigma$，すなわち $\operatorname{sign} f(a)=(-1)^k \operatorname{sign} f(b)$ である．

4.　〔**Rolle の定理**〕 $f(x)$ の相接する二つの根の間に $f'(x)$ の根がある．

〔**証**〕 a，b を $f(x)$ の相接する根とすれば，区間 $a<x<b$ において $f(x)$ は一定の符号をもつ．しかるに $x=a$ の直後では $f'(x)$ は $f(x)$ と同じ符号をもち，$x=b$ の直前では $f'(x)$ は $f(x)$ と反対の符号をもつ（§ 15）．すなわち $x=a$ の直後と $x=b$ の直前とにおいて $f'(x)$ が反対の符号をもつ．ゆえに区間 $a<x<b$ において $f'(x)$ が根をもたなければならない．

〔**問題 1**〕 $f(x)$ が m 個の実根をもつときには，$f^{(k)}(x)$ は $m-k$ 個以上の実根をもつ．$f(x)$ のすべての根が実根ならば，$f^{(k)}(x)$ に関しても同様で，$f^{(k-1)}(x)$ と $f^{(k)}(x)$ との根は互いに隔離する．ただし，複根は例外である．

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ を斉次の形

$$f(x, y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_kx^{n-k}y^k+\cdots+a_ny^n=0$$

に書いて，それを満足させる $\dfrac{x}{y}$ または $\dfrac{y}{x}$ の値を根と見れば，上の導函数 $f^{(k)}$ を

$$\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \qquad (\mu+\nu=k)$$

でおき換えても同様である．

〔問題 2〕 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が正数であるとき,

$$m_1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

$$m_2=\sqrt{\frac{x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_k=\sqrt[k]{\Sigma x_1x_2\cdots x_k/\binom{n}{k}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

とすれば

$$m_1\geqq m_2\geqq\cdots\geqq m_k\geqq\cdots\geqq m_n$$

で, どこでも, 等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ であるときに限って成り立つ.

$m_1, m_2, \cdots, m_n$ は正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均値で, m_1 は相加平均, m_n は相乗平均である.

〔解〕
$$f(x,y)=(x-x_1y)(x-x_2y)\cdots(x-x_ny)$$
とおけば
$$f(x,y)=x^n-\binom{n}{1}m_1x^{n-1}y+\binom{n}{2}m_2^2x^{n-2}y^2+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}m_k^kx^{n-k}y^k+\cdots$$
$$+(-1)^nm_n^ny^n$$
すべての根が正数であるから, 二次方程式
$$\frac{\partial^{n-2}f(x,y)}{\partial x^\mu\partial y^\nu}=0, \qquad (\mu+\nu=n-2)$$
すなわち
$$m_\nu^\nu x^2-2m_{\nu+1}^{\nu+1}xy+m_{\nu+2}^{\nu+2}y^2=0$$
が正根をもつ. ゆえに
$$m_{\nu+1}^{2(\nu+1)}\geqq m_\nu^\nu m_{\nu+2}^{\nu+2} \qquad \left(\frac{m_{\nu+1}}{m_{\nu+2}}\right)^{\nu+2}\geqq\left(\frac{m_\nu}{m_{\nu+1}}\right)^\nu.$$
特に $\dfrac{m_1}{m_2}\geqq1.$　ゆえに $\dfrac{m_2}{m_3}\geqq1, \dfrac{m_3}{m_4}\geqq1, \cdots, \dfrac{m_{n-1}}{m_n}\geqq1.$

〔問題 3〕 c を任意の実数とすれば, 方程式 $f(x)-cf'(x)=0$ は $f(x)=0$ と同数以上の実根をもつ.

〔解〕 $F(x)=(x-c)f(x)$ として, $F'(x)=f(x)-cf'(x)$ を用いる. $f(x)$ の相接す

る二つの実根の間に $f(x)-cf'(x)$ の実根が少なくとも一つずつはある．そのほか c の符号によって $f(x)$ の最大実根よりも大きいまたは $f(x)$ の最小実根よりも小さい実根がある．

〔**問題 4**〕 $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m=0$ が実根のみをもつときは，方程式

$$b_0f(x)+b_1f'(x)+b_2f''(x)+\cdots+b_mf^{(m)}(x)=0$$

は $f(x)=0$ と同数以上の実根をもつ．

〔解〕 前の問題を反復適用する．

〔**問題 5**〕 $f(x)=0$ は n 次の方程式で，c は区間 $(0,n)$ の外にあるときは，$cf(x)-xf'(x)=0$ は $f(x)=0$ と同数以上の根をもつ．

〔解〕 問題3の証明に少しの変更を加えればできる．Laguerre は $x^{-c}f(x)$ に Rolle の定理を応用して証明した．これは微分法である．

5. 〔**平均値の定理**〕 区間 (a,b) において

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

になるような値 c が存在する．

〔**証**〕 $x=a$, $x=b$ に対して，それぞれ $f(a)$, $f(b)$ に等しい値をもつ一次式を

$$\varphi(x)=f(a)+M(x-a)$$

とすれば，M は

$$f(b)=f(a)+M(b-a)$$

から求められる．すなわち

$$M=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

さて

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)$$

とおけば，仮定によって $F(a)=0$, $F(b)=0$. ゆえに Rolle の定理によって $a<c<b$ なるある値に対して $F'(c)=0$ になる．しかるに

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=f'(x)-M.$$

ゆえに $F'(c)=0$ から

$$f'(c)=M.$$

すなわち

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

6.　これから次の定理を得る.

区間 (a,b) において $f'(x)$ が常に正「または負」ならば, $f(x)$ はこの区間において単調に増大「または減少」する.

実際 $a<\alpha<\beta<b$ とすれば, 平均値の定理によって,

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c), \qquad \alpha<c<\beta.$$

仮定によって $f'(c)>0$. ゆえに $f(\beta)>f(\alpha)$.

〔**問題 6**〕 区間 (a,b) において $f(x)$ が根をもつとき, この区間に属する $x=r$ に対して $f(r)$ の値が小さいならば, r は根に近い値であろう. もしも区間 (a,b) において, $f'(x)$ が一定の符号をもち, $|f'(x)|>m$ ならば, 根を α とすると,

$$|\alpha-r|<\frac{|f(r)|}{m}$$

〔解〕 $f(\alpha)-f(r)=(\alpha-r)f'(c)$ から, $f(\alpha)=0$ を用いて, $-f(r)=(\alpha-r)f'(c)$. c は α と r との間にあるから, $|f'(c)|>m$. ゆえに $|f(r)|=|\alpha-r||f'(c)|$ から, 上の不等式を得る.

7.　〔**平均値の定理の拡張**〕 区間 (a,b) において

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c),$$

になるような値 c が存在する.

〔**証**〕 $x=a$ に対して $\varphi(a)=f(a)$, $\varphi'(a)=f'(a)$ で, かつ $x=b$ に対して $\varphi(b)=f(b)$ になるような二次式 $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{M}{2}(x-a)^2$$

のような形である. ただし M は

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+M\frac{(b-a)^2}{2} \tag{1}$$

によって定められる定数である.

さて

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)$$

とおけば，仮定によって

$$F(a)=0 \quad F'(a)=0 \quad \text{また} \quad F(b)=0.$$

ゆえに $F'(x)$ は a を根とするほかに a, b の間に根をもつ．したがって $F''(x)$ は a, b の間に根をもつ．その根を c とする．さて

$$F''(x)=f''(x)-\varphi''(x)=f''(x)-M.$$

ゆえに，$F''(c)=0$ から

$$f''(c)=M.$$

よって（1）から

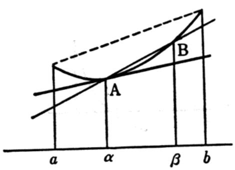
$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

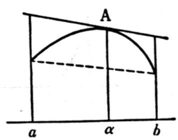
c は a と b との間にあるある値であるが，a, b の大小の関係は $a<b$ でも，$b<a$ でもよい．

8.　これから次の定理を得る．

区間 (a,b) において $f''(x)$ が常に正「または負」ならば，$f(x)$ のグラフはこの区間において上向き「または下向き」に弯曲する．

上向きに弯曲するとは区間 (a,b) において $f(x)$ のグラフが任意の点 α における接線の上側に横たわることをいう．下向きの弯曲はその反対である．$f(x)$ のグラフと $x=a$, $x=b$ に対する点を結ぶ弦とが一つの凸形を作るのである．





$x=\alpha$ に対するグラフの接線は一次式 $f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)$ で表わされる．

さて $f(x)=\{f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)\}+\dfrac{(x-\alpha)^2}{2}f''(x')$, x' は α と x との中間にあるある値であって，仮定によって $f''(x')>0$. ゆえにグラフは接線の上側にある（上向きの場合）．

〔**問題 7**〕 接線の代わりに点 $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$ と $\mathrm{B}(\beta,f(\beta))$ とを結ぶ弦 AB を取れば，区間 (α,β) ではグラフが AB の下側にあり，(a,α)，(β,b) では

AB の延長の上側にある（これは上向き，$f''(x)>0$ の場合である．下向きの場合には，上側下側を交換する）．

〔解〕 AB を表わす一次式を $mx+l$ とすれば $f(\alpha)=m\alpha+l, f(\beta)=m\beta+l$．いま $F(x)=f(x)-(mx+l)$ とおけば $F'(x)=f'(x)-m$，$F''(x)=f''(x)$．ゆえに $F''(x)>0$．

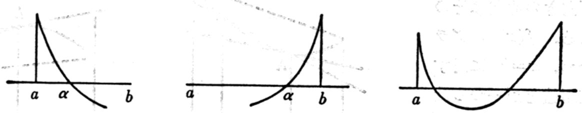
さて仮定によって $F(\alpha)=0$，$F(\beta)=0$．ゆえに $\alpha>\gamma>\beta$，$F'(\gamma)=0$ とするとき，(α,γ) では $F'(x)<0$，$F(x)$ は単調減少，したがって (a,α) では正，(α,γ) では負である．同様に，(γ,β) では $F(x)$ は負，(β,b) では正である．

§ 21.　Newton の方法

1.　区間 (a,b) に $f(x)$ の根があることが知られ，かつその区間がすでに十分狭く取られて，区間内において $f''(x)$ が一定の符号をもつとするとき，次のようにして根の近似値を求めることができる．

まず $f''(x)>0$ とし，α を $f(x)$ の根とする．$f'(x)$ は単調に増大するから，もしも $f'(\alpha)<0$ ならば，区間 (a,α) において $f'(x)$ は常に負，したがって $f(x)$ は単調に減少する．ゆえに $f(a)>0$，$f'(a)<0$．またもし $f'(\alpha)>0$ ならば，(α,b) において $f'(x)$ は常に正，したがって $f(x)$ は単調に増大するから $f(b)>0$，$f'(b)>0$．

区間 $(a,\ b)$ に根が一つより多くあるときには，根の数は二つで，$f(a)$，$f(b)$ はともに正である（§ 20，問題 7）．



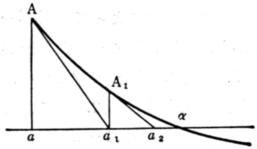
同様に $f''(x)<0$ であるときには，$f(a)$ または $f(b)$ が負になる（f に $-f$ を代用して考える）．

Newton の方法では，区間 (a,b) の両端の中で f と f'' との符号の一致する方を取って，それを根の第一の近似値と見なし，それから次々に一層精密な近似値を求めて行くのである．

いま $f''(x)>0$，$f(a)>0$（したがって $f'(a)<0$，上出）として，その方法

を説明する.

Newton の方法では, $f(x)$ のグラフに $x=a$ に対応する点 $A(a,f(a))$ に



おける接線を代用して, 接線が x 軸に交わる点をもって根の近似値とするのである.

この接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

であるから, それが x 軸に交わるところを $x=a_1$ とすれば,

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

$f'(a)<0$ だから, $a<a_1$. またグラフは上向きに彎曲しているから, $f(a_1)>0$. したがって $a_1<\alpha$. すなわち $a<a_1<\alpha$ であるから, a_1 は a よりも α に近いのである.

次に a に a_1 を代用して同様の計算を行なう. $x=a_1$ に対応するグラフの点を $A_1(a_1,f(a_1))$ とし, A_1 における接線が x 軸に交わる点を $x=a_2$ とすれば

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \qquad a_1<a_2<\alpha.$$

この操作を無限に続行するとすれば, $a<a_1<a_2<a_3<\cdots$ のように, しだいに増大する数の一列を得るが, それらは α よりも小であるから, ある一つの極限に近迫する. その極限を λ とすれば, $\lambda\leqq\alpha$ であるが,

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

であるから,

$$\lambda=\lambda-\frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}.$$

ゆえに $f(\lambda)=0$. したがって $\lambda=\alpha$ (区間 (a,α) に $f(x)$ の他の根はないから).

すなわち $a_n\to\alpha$. ゆえに $a_1,a_2,a_3,\cdots$ は限りなくしだいに α に近迫する. これが Newton の方法の理論的の根拠である.

2.　次の例は Newton が取り扱ったものである．

〔例〕
$$f(x)=x^3-2x-5=0. \qquad (1)$$
$$f'(x)=3x^2-2, \qquad f''(x)=6x.$$

Descartes の符号律によって正根が一つある．いまその正根を計算しよう．$f(2)=-1$ であるから，根は 2 よりも大きいが，$f(2)$ が小さいから，根は 2 に近いであろう．

いま 2.1 を試みると $f(2.1)=0.061$ で + になるから，根は区間 (2,2.1) にある．よって
$$x=2.1-u$$
とおいて $f(2.1-u)$ を展開すれば
$$0.061-11.23u+6.3u^2-u^3=0 \qquad (2)$$
を得る．

1	0	−2	−5
	2.1	4.41	5.061
	2.1	2.41	0.061
	2.1	8.82	
	4.2	11.23	
	2.1		
1	6.3		

ここでは $f''>0$, $f(2.1)>0$. ゆえに $a=2.1$ として計算を始める．根は a よりも小さいから $u=a-x=2.1-x$ とおいて，u を正にするのである．

さて
$$0.061-11.23u=0$$
から u の近似値として
$$\frac{0.061}{11.23}=0.00543188\cdots \qquad (3)$$
を得る．

いまその最高位一桁だけを取って　$u=0.005+v$.

すなわち
$$x=2.1-0.005-v$$
とおいて，前のように (2) に代入して v の昇冪に排列し，次々にこのようにして，根の数字を一桁ずつ求めて行くことができる．

このように Newton の方法を根の計算に応用するのを Horner の方法という．計算は次の通り．

	1	−6.3	11.23	−0.061	
		0.005	− 0.031475	+0.055992625	0.005
		−6.295	11.198525	−0.005007375	
		0.005	− 0.031450		
		−6.290	11.167075		
		0.005			
		−6.285			
(*)	1	−6.29	11.16708	−0.005007375	0.0004
		0	− 0.00252	+0.004465824	
		−6.29	11.16456	−0.000541551	
			− 0.00252		
			11.16204		
(**)	1	−6.3	11.1620	−0.000541551	0.00004
		0	− 0.0003	+0.000446468	
			11.1617	−0.000095083	0.000008518
				89294	
				5789	
				5581	
				208	
				112	
				96	
				89	

$u=0.005448518$

$x=2.094551482$

上の (*) のところは v を求める方程式の係数であるが，根を定数項と同じく小数第九位あたりまで求めるつもりで，第二，第三の係数の末位を四捨五入しておいたのである．その定数項を第三の係数で割って（符号を変えて）根の次の位として 0.0004 を得る．それを用いて $v=0.0004+w$ とおいて，w の方程式を求めるのであるが，その際，第三の数は末位（小数第5位）未満を四

捨五入しつつ計算すれば，結果は (**) のようになる．よって根の次の位 0.00004 を得るが，これを用いて同様の省略をしながら次の段に移るとして，もはや第三の係数が根の次位以下の数字のために影響を受けないから，省略割算によって根の数字四桁を求めるのである．

根の末位はやや不確かであるが，参考として残しておく．

このような省略をしないでは，Horner の方法は実用に適しないであろう．

3. 上の例の $x=2.1$ のように，すでに根に近い値が得られたときには，Horner 式の計算によらないで，逐次補正の法によって根の近似値を迅速に求めることができる．

上の（2）から

$$u=\frac{0.061}{11.23}+\frac{u^2(6.3-u)}{11.23}, \tag{4}$$

ゆえに u の代わりに（3）の値を取れば，誤差は

$$\frac{u^2(6.3-u)}{11.23} \tag{5}$$

に等しい．u の値は知れていないけれども，（3）がそれに近いから，それを用いて，(5)から誤差を概算することができる．すなわち

$$u=\text{約 }5\times10^{-3},\quad u^2=\text{約 }30\times10^{-6},\quad (5)=\text{約 }2\times10^{-5}.$$

ゆえに（3）によって，$u=0.0054$ とすれば，末位まで正しいが，上の（5）を入れていま一桁多くとれば，

$$u=\text{約 }0.00545. \tag{6}$$

これを用いて（5）を四桁だけ計算すれば

$$0.00001665 \tag{7}$$

を得る．これを（3）に加えて

$$u=0.00544853 \tag{8}$$

とすれば，一層よい．しからば

$$x=2.09455147$$

を得る．

（8）によれば（6）の値には1万分の3ほどの比例誤差があるから，（7）の末位は不確かで，したがって（8）の末位も不確かである（前掲の結果と比較せよ）．

代数書に Horner の方法を記載することが慣例になっているから，本書にも一例を掲げておくのであるが，すべて近似計算では計算尺，計算器および各

種の表または図解法を用いるのであって特別の修練を要する．器械なしの紙上計算は実用的でない．また代数方程式の根の近似計算だけを切り離して取り扱うことは不適切であるから，本書では上の一例を以て近似計算は打ち切る．

第4章　多 項 式 の 整 除

§ 22.　恒等なる多項式

1.　多項式の四則の演算法は周知であるから，再説の必要を認めないが，本章では四則の理論に関して二，三の要点だけを述べる．

代数学の基本定理 2.4 によれば，n 次の多項式は n 個の一次因数に分解され，しかもその分解は一意的である．ゆえに n 次の多項式 $f(z)$ が n よりも多くの z の相異なる値に対して 0 になることはない．

もっとも，これだけのことならば，基本定理によらなくても，容易に証明することができる（§ 7.4）．

これによって次の重要な定理が得られる．

〔定理 4.1〕　**二つの多項式 $f(x)$, $g(x)$ が x の任意の値に対して相等しい値を取るならば，それらの多項式は形式上合致する．**

なお精密にいえば，n 次以下の多項式 $f(x), g(x)$ が n よりも多くの相異なる x の値に対して相等しい値を取るならば，$f(x)$ と $g(x)$ とは形式上合致する．

形式上合致するというのは，$f(x)$ と $g(x)$ との次数はもとより相等しく，かつ x の各冪の係数が，それぞれ相等しいのをいうのである．

〔**証**〕　もし仮りに $f(x)$ と $g(x)$ とが形式上合致しないとすれば，$F(x)=f(x)-g(x)$ とおけ．しからば $F(x)$ は n 次以下の多項式で，しかも仮定によって n よりも多くの x の相異なる値に対して $F(x)$ が 0 になる．これは矛盾である．

定理 4.1 にいうような二つの多項式を恒等という．それは x のいかなる値に対しても多項式の値が常に相等しいことを意味するのであるが，実際応用上においては，それらが形式上合致することが利用される．形式が合致すれば，もちろん恒等であるが，その逆，すなわち恒等は形式上合致の場合に限ること

が，定理 4.1 によって確定した.

2. 次に多項式の四則に関する一，二の重要な定理を述べる.

〔**定理 4.2**〕 **m 次と n 次との多項式の積は $m+n$ 次の多項式である.**

〔**証**〕

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,\quad a_0\neq 0$$

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,\quad b_0\neq 0$$

とするとき，分配法則によって計算すれば，積として

$$f(x)g(x)=a_0b_0x^{m+n}+(a_0b_1+a_1b_0)x^{m+n-1}+\cdots+a_mb_n$$

を得る．仮定によって $a_0b_0\neq 0$ であるから，この積は $m+n$ 次の多項式である.

〔注意〕 定数をも特別の場合として多項式の中に入れる．それは 0 次の多項式である．ただし定数 0 は多項式の中には入れるが，それを 0 次の多項式とは見なさないで，0 は次数をもたないものとして特別扱いをする方が，都合がよい．$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots$ が n 次であるというときには，$a_0\neq 0$ とするのと同じように，$f(x)=a_0$ を 0 次の多項式というときにも，$a_0\neq 0$ とするのである．このような規約のもとにおいてのみ定理 4.2 が例外なく成り立つのである（上の $a_0b_0\neq 0$ のところが大切).

定理 4.2 は因子が二つよりも多い場合にも成り立つ．すなわち一般に多項式の積の次数は因子である多項式の次数の和に等しい．ゆえにまた次の定理が成り立つ.

多項式の積が（恒等的に）0 に等しいときは，因子のうち少なくとも一つの多項式は（恒等的に）0 に等しい.

次はこれの応用である.

多項式 A, B, C の間に恒等式 $AB=AC$ が成り立って，A が恒等的に 0 に等しくないならば，恒等式 $B=C$ が成り立つ．すなわち恒等式の両辺から恒等的に 0 に等しくない共通因子を取り去ってもよい.

変数 x の特別な値に対しては $A=0$ になる．その値に対して，$AB=AC$ から，ただちに $B=C$ は得られない．しかし，このような変数 x の特別な値の数は多くとも A の次数だけで，それらを除けば，$B=C$ である．ゆえに $B=C$ は変数 x の無限に多くの（上の特別の値以外の）値に対して成り立つ．したがって定理 4.1 によって，$B=C$ が恒等的に（したがって上の特別の値に対しても）成り立つのである.

3. 多項式四則に関する基本定理としてあげるべきものは，一つの変数の多

項式の割り算に関する次の定理である．文字はすべてその変数の多項式を表わす．

〔**定理 4.3**〕 A, B は x の多項式で，B は n 次であるとする．

そのとき

$$A=BQ+R$$

で，かつ R が n よりも低次であるような多項式 Q, R が必ず，しかもただ一組に限って存在する．

〔**証**〕 Q, R を求めるのは，いわゆる多項式の割り算で，周知の計算である．問題の要点は，R の次数に関する付帯条件のもとにおいて，Q, R がただ一組に限るというところにある．その証明は定理 4.2 による．

いま上の付帯条件のもとにおいて

$$A=BQ+R, \qquad A=BQ'+R'$$

とすれば

$$B(Q-Q')=R'-R.$$

仮定によって $R'-R$ は n 次以上の多項式であり得ない．しかるに B は n 次である．ゆえに $Q-Q'=0$ （さもなければ，$B(Q-Q')$ したがって $R'-R$ は n 次以上である）．$Q-Q'=0$ ならば，$R'-R=0$．すなわち $Q=Q'$, $R=R'$.

〔**問題 1**〕 二つ以上の変数の多項式においても，恒等は形式上合致の場合に限る．なお精密にいえば，x に関しては m 次以下，y に関しては n 次以下である二つの多項式 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が x に $m+1$ の相異なる値 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ また y に $n+1$ の相異なる値 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ をすべての $(m+1)(n+1)$ の組合せにおいて与えるときに，相等しい値を取るならば，f と g とは形式上合致する．三つ以上の変数の場合も同様である．

〔解〕 定理 4.1 のように $f-g=F$ を考察すれば，F が上の値に対して 0 になるとき，F が形式上 0 になる（各項の係数が 0 になる）ことを示せばよい．F を x の降冪に排列して

$$F(x,y)=\Phi_0(y)x^m+\Phi_1(y)x^{m-1}+\cdots+\Phi_m(y)$$

としるせば，$\Phi_0(y)$, $\Phi_1(y)$, $\cdots$, $\Phi_m(y)$ は y のみに関する n 次以下の多項式である．

さて $y=y_0$ とすれば $F(x,y_0)$ は x のみの多項式になるが，仮定によって x に x_0, x_1, …, x_m を代入するとき 0 になるから，定理 4.1 によって $F(x,y_0)$ の係数 $\Phi_0(y_0)$, $\Phi_1(y_0)$, …, $\Phi_m(y_0)$ はみな 0 に等しい．y に y_1, y_2, …, y_n を代入しても同様であるから，$\Phi_k(y)$ は定理 4.1 によって形式上 0 に等しい．ゆえに $F(x,y)$ を x および y の冪に整頓すれば，各項が消滅する．任意数の変数の場合は，数学的帰納法による．

§ 23.　多項式の最大公約数，Euclid の法式

1.　一つの変数 x の多項式が一次因数に分解されて

$$a_0(x-\alpha)^a(x-\beta)^b\cdots(x-\lambda)^l \qquad (\alpha\neq\beta\neq\cdots\neq\lambda)$$

のような形に与えられているとすれば，多項式の整除または多項式の公約数などに関する問題ははなはだ簡明に解決される．A, B, C などの文字は x の多項式を表わすものとしていうのであるが，A が B で割り切れるために必要かつ十分な条件は，B に含まれる一次因数が，その重複度数をも計算に入れて，ことごとく A に含まれていることである．それが十分な条件であることは明白であるが，同時に必要な条件であることは，一次因数への分解の一意性からの帰結である．A が B で割り切れるとして，$A=BC$ とおけば，分解の一意性から，A に含まれる一次因数は，B と C とに含まれる一次因数の全部であるから，B に含まれる一次因数は A に含まれる一次因数の一部でなければならない．

また多項式 A, B, C などの公約数はこれらの多項式に共通して含まれる一次因数のみを含むものである．特に最大公約数は共通の一次因数の全部の積である．もちろんここでも一次因数の重複度数を計算に入れていう．

2.　一次因数に分解された多項式の公約数を求めることは容易でも，多項式を一次因数に分解することは，実行上困難な問題である．しかるに多項式の最大公約数は有理的計算（四則）によって求めることができることは，著しい事実といわねばならない．この計算はいわゆる Euclid の互除法で，周知のことではあるが，念のためにここで一応説明しておくのである．

$f(x), f_1(x)$ を与えられた多項式とするとき，f を f_1 で割って整商を $q(x)$，剰余を $f_2(x)$ とすれば，f_2 は f_1 よりも低次である．次に f_1 を f_2 で割って

整商を $q_1(x)$，剰余を $f_3(x)$ とすれば，f_3 は f_2 よりも低次である．このような操作を継続すれば，次々の剰余の次数がしだいに低下するから，いつか割り切れる場合に出会うに違いない．いま f_{m-1} が f_m で割り切れたとすれば，そこで演算が終局する．すなわち

$$\left.\begin{aligned} f&=qf_1+f_2,\\ f_1&=q_1f_2+f_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{m-2}&=q_{m-2}f_{m-1}+f_m,\\ f_{m-1}&=q_{m-1}f_m. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

上の第一の等式から $f_2=f-qf_1$．ゆえに f,f_1 の公約数は f_2 の約数，したがって f_1,f_2 の公約数である．同様に第二の等式から，f_1,f_2 の公約数は f_2，f_3 の公約数である．しだいにこのようにして f,f_1 の公約数は f_{m-1}, f_m の公約数であるが，f_{m-1} は f_m で割り切れるから，f_{m-1}，f_m の公約数はすなわち f_mの約数にほかならない．ゆえに f,f_1 の公約数は f_m の約数である．約数の中に，f_m 自身をも含めていうのである．逆に f_m の約数はもちろん f_{m-1}，f_m の公約数，したがって $f_{m-2}=q_{m-2}f_{m-1}+f_m$ の約数，すなわち f_{m-2}，f_{m-1} の公約数等等で，つまり f，f_1 の公約数である．

ゆえに f_m は f,f_1 の公約数であって，かつ f,f_1 の公約数は f_m の約数でなければならない．ゆえに f_m は f,f_1 の公約数のうち，最高次のもので，かつ公約数中唯一の最高次のものである．もちろん定数因子は考えに入れないでいう．f_m がすなわち f, f_1 の最大公約数である．上の説明において注意すべき要点は f,f_1 の公約数の中に f_m のような特別のものがあって，それはすべての公約数で割り切れるというところにある．すべての公約数で割り切れるから，公約数の中で最高次であり，また定数因子をほかにしてただ一つである．すなわち最大公約数の特性は，すべての公約数を約数として含むような特別な公約数という点にある．それが公約数の中で最高次であるのは，いわば付帯的の条件にすぎないのである（最高次の公約数があることは初めから明白であるが，最高次の公約数がただ一つであることは，単に最高次であるということだ

けからは出て来ない).

3. 上の Euclid の法式から，なお次の重要な定理が導かれる.（1）の第一の等式から

$$f_2=f-qf_1.$$

これを第二の等式の f_2 に代入すれば，

$$f_3=f_1-q_1f_2=f_1-q_1(f-qf_1)=-q_1f+(qq_1+1)f_1.$$

これを第三の等式の f_3 に代入すれば，

$$\begin{aligned}f_4&=f_2-q_2f_3=(f-qf_1)-q_2(-q_1f+(qq_1+1)f_1)\\&=(q_1q_2+1)f-(qq_1q_2+q+q_2)f_1.\end{aligned}$$

このようにして次々の剰余 $f_2,f_3,f_4,\cdots$ は，いずれも $Pf+Qf_1$ のような形に表わされる. P, Q は $q,q_1,q_2,\cdots$ から加法，減法，乗法によって組み立てられる多項式である. このような計算を続行すれば，最後の剰余である最大公約数 f_m もまた上の形に書き表わされるであろう. よって次の定理を得る.

〔**定理** 4.4〕 一つの変数の多項式 f,f_1 の最大公約数を f_m とすれば，

$$Pf+Qf_1=f_m \tag{2}$$

になるような多項式 P, Q を求めることができる.

特に f,f_1 が互いに素であるとき(定数以外に公約数をもたないことをいう)は

$$Pf+Qf_1=1 \tag{3}$$

になるような多項式 P, Q を求めることができる.

f と f_1 とが互いに素であるときは，f_m は定数である. それで（2）の P, Q を割ったものを P, Q に代用すれば，（3）を得る.

〔**定理** 4.5〕 B, C が互いに素である多項式で，AC が B で割り切れるならば，A が B で割り切れる.

A, B, C はいずれも一つの変数 x の多項式である.

〔**証**〕 仮定によって B, C は互いに素であるから，

$$PB+QC=1$$

になるような多項式 P, Q が存在する. ゆえに

$$PAB+QAC=A.$$

仮定によって，AC は B で割り切れ，また PAB はもちろん B で割り切れるから，A が B で割り切れる．

〔注意〕 多項式の因数分解を用いるならば，この定理は容易に証明されるのであるが，因数分解を用いないで，Euclid の法式を根拠として証明することが重要である．その理由は後に至って（§ 25）明らかになるであろう．

〔**問題 1**〕 A, B が互いに素である x の多項式で，また C は任意の多項式であるとき

$$AU+BV=C$$

になるような多項式 U, V が求められる．その一組を U_0, V_0 とすれば，一般に

$$U=U_0+BS, \qquad V=V_0-AS.$$

S は任意の多項式である．

〔解〕 P, Q を定理 4.4 の多項式とする．すなわち $AP+BQ=1$. しからば $APC+BQC=C$. ゆえに $U=PC$, $V=QC$ が上の問題の一つの解である．ただし一般の解はこのように C なる公約数をもつものではない．いま一組の解を U_0, V_0, 任意の解を U, V とすれば，

$$AU+BV=AU_0+BV_0=C$$

から

$$A(U-U_0)=B(V_0-V).$$

すなわち $A(U-U_0)$ は B で割り切れる．しかも A と B とは互いに素であるから $U-U_0$ は B で割り切れる（定理4.5）．よって $U-U_0=BS$ とおけば，$V_0-V=AS$, したがって $U=U_0+BS$, $V=V_0-AS$ でなければならない．逆に，このような U, V が問題の解であることは明白である．

〔**問題 2**〕 A, B, C は x の多項式で，公約数をもたないならば

$$AU+BV+CW=1$$

になるような多項式 U, V, W が求められる．

〔解〕 A, B の最大公約数を M とすれば，M と C は互いに素である．いま $AP+BQ=M$, $MS+CT=1$ とすれば，

$$A(PS)+B(QS)+CT=1.$$

〔注意〕 本節の定理は整数にもあてはまる．上の説明で，多項式とあるところを整数

に代えて読み返すとよい．ただし多項式の低次というところは，整数の絶対値の小さいこととするのである．

§ 24. 多項式の可約，既約

1. 多項式を一次因数に分解することができるというのは，根が複素数であってもよいとした上で一般的に成り立つところの定理である．もし因数の係数を制限すれば，事情がまったく違う．

たとえば $x^2+1=(x-i)(x+i)$ であっても，もし因数が実係数をもつことを要求すれば，分解が不可能になる．

また $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ であるけれども，因数の係数を有理数に制限すれば，分解は不可能である．

本節においては，有理係数をもった多項式（すべての係数が有理数である多項式）のみを考察することにして，それが同じく有理係数をもった因数に分解されるか否かを論ずる．

有理係数をもつ多項式が有理係数をもつ二つ以上の因数（一次以上）に分解されるとき，それを可約といい，このような分解が不可能であるとき，**既約**という．

たとえば x^2-4 は可約，$2x^2-4$ は既約である．

〔**定理 4.6**〕 有理係数をもつ多項式を既約因数に分解することを得る．その分解の結果は定数因子だけの違いを考えないならば，ただ一つである．

〔**証**〕 既約因数に分解することの可能性は明白である．分解の結果がただ一つであることを証明するには，Euclidの法式に立ち返って考える必要がある．

有理係数をもった多項式 $f(x)$，$f_1(x)$ に Euclid の互除法を行なうとき，次々に出て来る商 $q_0, q_1, \cdots$ および剰余 $f_2, f_3, \cdots$ はいずれも有理係数をもつ多項式のみである．それは多項式の割り算の過程を再考して見ればわかるであろう．

よって最大公約数 f_m または定理 4.4 の P, Q なども有理係数をもつ多項式である．

特に，定理 4.5 から次の結果を得る．

有理係数の多項式 φ_1, φ_2 の積が既約多項式 ϕ で割り切れるならば，φ_1 または φ_2 が ϕ で割り切れる.

なぜならば，φ_1 と ϕ との最大公約数は有理係数をもつ多項式で，かつ既約である ϕ の約数であるから，それは ϕ または定数でなければならない. ゆえに φ_1 が ϕ で割り切れないとすれば，φ_1 と ϕ とは互いに素である. しかるに，$\varphi_1\varphi_2$ が ϕ で割り切れるというから，φ_2 が ϕ で割り切れねばならない.

同様に $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ が ϕ で割り切れるときには，φ_1 または φ_2 または φ_3 が ϕ で割り切れる.

さて f を既約因数に分解して

$$f=\phi_1\phi_2\phi_3\cdots=\phi_1'\phi_2'\phi_3'\cdots$$

を得たと仮定すれば，$\phi_1'\phi_2'\phi_3'\cdots$ が ϕ_1 で割り切れるのであるから，因数の中の一つが ϕ_1 で割り切れる. それを ϕ_1' であるとすれば，ϕ_1' も既約であるから，ϕ_1' と ϕ_1 とは定数因子のみが異なり得るのである. その定数因子を ϕ_2', ϕ_3', $\cdots$ などに繰り込んで $\phi_1'=\phi_1$ とするならば，$\phi_2\phi_3\cdots=\phi_2'\phi_3'\cdots$ を得る. よって前と同様にして $\phi_2'=\phi_2$, $\phi_3'=\phi_3$, $\cdots$を得るのである.

2. 有理係数をもつ多項式 $f(x)$ はその各係数の分母の公倍数をくくり出して各係数を整数に化して後，それらの整係数の最大公約数をくくり出して

$$f(x)=\alpha(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$$

のような形にして，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を公約数をもたない整数（α は有理数）にすることができる. この場合 a_0, a_1, $\cdots, a_n$, および α は符号だけの違いを考えないならば，一定である. このように公約数をもたない整係数をもつ多項式を**原始多項式**という.

もしも

$$f(x)=\alpha(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=\alpha'(a_0'x^n+a_1'x^{n-1}+\cdots+a_n')$$

で，右辺の括弧の中も原始多項式であるとするならば，

$$\frac{\alpha}{\alpha'}a_0=a_0',\quad \frac{\alpha}{\alpha'}a_1=a_1',\cdots,\frac{\alpha}{\alpha'}a_n=a_n'.$$

さて，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ は公約数をもたないから

$$a_0q_0+a_1q_1+\cdots+a_nq_n=1$$

になるような整数 $q_0,\ q_1,\cdots,\ q_n$ がある（126頁末の注意）．それらを上の等式に掛けて加えるならば α/α' が整数であることがわかる．同様にして，α'/α も整数である．ゆえに $\alpha/\alpha'=\pm1$ すなわち $\alpha'=\pm\alpha$．したがってまた $a_0'=\pm a_0,\cdots,\ a_n'=\pm a_n$．

〔**定理 4.7**〕 原始多項式の積は原始多項式である（Gauss の定理）．

〔**証**〕
$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m,$$
$$\psi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$$

を原始多項式とし，その積 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ もまた原始多項式であることを示すために，任意の素数 p を取って見る．$\varphi(x)$，$\psi(x)$ は原始多項式であるから，すべての係数が p で割り切れることはない．いま $\varphi(x)$，$\psi(x)$ において p で割り切れない係数をもつ最低次の項を a_hx^h，b_kx^k とする．すなわち $h>0$ ならば $a_0,\ a_1,\cdots,a_{h-1}$ は p で割り切れると仮定するのである．$b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{k-1}$ も同様である．さて $f(x)$ における x^{h+k} の係数は

$$a_hb_k+a_{h-1}b_{k+1}+a_{h-2}b_{k+2}+\cdots$$
$$+a_{h+1}b_{k-1}+a_{h+2}b_{k-2}+\cdots$$

である．この式の項の中で，a_hb_k は p で割り切れないが，その他の項は h よりも小さい番号の a または k よりも小さい番号の b を因数とするために，全部 p で割り切れる．ゆえにこの係数は p で割り切れない．すなわち $f(x)$ は p で割り切れない係数をもつ．p は任意の素数であるから，$f(x)$ は原始多項式でなければならない．

上の証明において，a_h，b_k が p で割り切れないことから，その積 a_hb_k が p で割り切れないと断言し得るために，p を素数としたのである．

〔**定理 4.8**〕 整係数をもつ多項式が可約ならば，その多項式は整係数をもつ因子に分解される．

〔**証**〕 多項式 $f(x)$ は整係数をもち，それが有理係数をもつ因子に分解されるとして

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$$

とする．さて，$f(x), \varphi(x), \psi(x)$ に対する原始多項式を $f_0(x), \varphi_0(x), \psi_0(x)$ として

$$f(x)=\alpha f_0(x),\ \ \varphi(x)=\beta\varphi_0(x),\ \ \psi(x)=\gamma\psi_0(x)$$

とおけば

$$\alpha f_0(x)=\beta\gamma\varphi_0(x)\psi_0(x).$$

定理 4.7 によって，$\varphi_0(x)\psi_0(x)$ は原始多項式であるから，

$$\alpha=\beta\gamma,\ \ f_0(x)=\varphi_0(x)\psi_0(x)$$

仮定によって，α は整数であるから，$\beta\gamma$ は整数である．それを φ_0 または ψ_0 へ繰り込めば，$f(x)$ が整係数の因子に分解される．

〔例〕 $6x^2-11x+3$ は有理根 1/3, 3/2 をもつから，可約で，$6x^2-11x+3=6(x-1/3)(x-3/2)$．因子を原始多項式になおして，$6x^2-11x+3=(3x-1)(2x-3)$．

〔問題 1〕 整係数の多項式において最高次の項の係数を除いて，その他の係数は全部ある素数 p で割り切れるとする．もし常数項が p^2 では割り切れないならば，この多項式は既約である．（Eisenstein の定理）

〔解〕 この多項式を $f(x)$ とする．$f(x)$ が可約ならば，それは整係数の因数に分かれる．それを $\varphi(x), \psi(x)$ として，上の定理の証明と同様の記号を用いるならば，$f(x)$ における x^{h+k} の係数が p で割り切れないことになるから，x^{h+k} が $f(x)$ の最高次の項でなくてはならない．ゆえに $h=m$, $k=n$. すなわち $\varphi(x)$, $\psi(x)$ においても最高次の項の係数の外はみな p で割り切れる．ゆえに $f(x)$ の定数項が p^2 で割り切れねばならない．

〔注意〕 $f(x)$ のような多項式の定数項がちょうど p^k で割り切れるならば，$f(x)$ が可約であっても，因数の数は k 以下である（各因数は係数に関して $f(x)$ と同様の性質をもつから)．

〔問題 2〕 $f(x)=x^5-x^3-2x^2-2x-1$ を既約因数に分解すること．

〔解〕 分解可能ならば，整係数因数に分解される．その因数の定数項は ±1 でなければならず，また一つは二次以下でなければならない．そこで一つの因数を

$$\varphi(x)=ax^2+bx+1$$

とおいて見る．a は ±1 または0で，$a=0$ ならば，$b=\pm1$ でなければならない．$f(1)=-5$ だから，$x=1$ に対する各因数の値は 5 の約数，すなわち ±1, ±5 の中である．ゆえに

$$a+b+1=\pm1,\quad \pm5.$$

同様に $f(-1)=-1$ から

$$a-b+1=\pm 1.$$

よって $a,\ b$ の値は次の 8 通りの中である.

$a+b+1$	$=1,$	$1,$	$-1,$	$-1,$	$5,$	$5,$	$-5,$	$-5,$
$a-b+1$	$=1,$	$-1,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$-1,$
a	$=0,$	$-1,$	$-1,$	$-2,$	$2,$	$1,$	$-3,$	$-4,$
b	$=0,$	$1,$	$-1,$	$0,$	$2,$	$3,$	$-3,$	$-2.$

この中で, 問題になるのは

$$\varphi(x)=-x^2+x+1,\ -x^2-x+1,\ x^2+3x+1$$

の三つである. 実際割って見ると, どれも $f(x)$ を割り切れない. ゆえに $f(x)$ は既約である.

〔注意〕

$x=2$	とすれば	$f(x)=11.$	$-x^2-x+1=-5.$
$x=-2$	とすれば	$f(x)=-29.$	$-x^2+x+1=-5.$
$x=3$	とすれば	$f(x)=191,$	$x^2+3x+1=19.$

ゆえに割って見なくても, いけないことはわかる.

§ 25.　二つ以上の変数に関する多項式

1.　二つ以上の変数の多項式の理論は一つの変数の場合に比べて著しく困難である. その一つの原因は, 多項式が一次因子に分解されるというような基本定理が, 二つ以上の変数の場合には成り立たないところに存在する. 一次因子はさておき, 因数分解が一般的に不可能である.*

たとえば, x^2+y^2+1 または $xy+ax+by+c$ $(ab\neq c)$ などの分解不可能であることは, 容易に験証されるであろう (二元二次式が因数に分解されるのは, 解析幾何学の語でいえば, 二次曲線が二つの直線に分解される場合で, それはきわめて特別な場合に限る).

本節では, 二つの変数 $x,\ y$ の多項式に関して整除の理論の概要を述べる. 変数を二つに限るのは言語を短くするためであって, 数学的帰納法を用いるならば, 三元以上の多項式にも拡張することに困難はないであろう.

多項式 $f(x,\ y)$ が二つ以上の (少なくとも一次の) 多項式の積に分解されるときは, それを可約といい, そうでなければ既約という.

---

* ただし二変数の場合に限り, 斉次の多項式は一次因子に分解される.

ゆえに，ここでいう可約，既約は有理係数をもつ一元多項式の場合（§24）とは意味が違う．すなわち因数の係数を制限するために，分解が不可能であるのではなく，絶対的に不可能なのである．ゆえに可約，既約の代わりに，語は長くても「分解可能」，「分解不可能」というほうが実は妥当である．用語はともかくも，意味が混同されないことが肝要である．

2.　本節では次の定理を目標として話を進める．

〔定理 4.9〕　多項式 $f(x,y)$ を既約因数に分解することができる．分解の結果は定数因子を考えに入れねばただ一様である．

〔証〕 $f(x, y)$ が可約ならば，低次な因数に分解されるから，各因数が既約になるまで分解を続行すれば，既約因数への分解が成就することは明白であるが，その結果の一意性が問題である．

もし§23（定理 4.5）と同様に「B，C が互いに素で，AC が B で割り切れるならば，A が B で割り切れる」ことが二つの変数の場合にも証明できるならば，それを用いて§24 とまったく同様に分解の一意性を証明することができるであろう．

さて§23 で定理 4.5 を Euclid の法式から導いたのであるが，二つの変数の場合には，既に定理 4.3 のような意味での割り算が適用されないから，Euclid の法式に若干の変更を行なうことが必要である．

そのために x，y の多項式を x の降冪に排列して

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$$

のような形にしるす．この場合 x の各冪の係数 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ は変数 y の多項式である．もし $A_0, A_1, \cdots, A_n$ が共通の因数をもつならば，その最大公約数をくくり出して

$$P(A_0'x^n+A_1'x^{n-1}+\cdots+A_n')$$

とおけば，括弧の中は係数が y に関して公約数をもたない多項式である．§24 にならって，それを仮りに x に関して原始多項式ということにする．一つの多項式をこのように原始多項式と y のみの多項式との積に分解することは，定数因子だけの違いを考えに入れないならば，ただ一様に限ることは明白であろう．

このような原始多項式に関して，定理 4.8 とまったく同様にして，「原始多項式の積が原始多項式である」ことが証明される．この場合には定理 4.7 の証明における素数 p に，y の一次式を代用すれば，証明はなんらの変更を要しないで，そのまま適用される．

よって αF において，α が y のみの多項式であるとき，αF が原始多項式 G で割り切れるならば，F が G で割り切れる(130 頁参照)．

さて多項式 B, C を x の降冪に排列して B を C で割るならば，x に関する整商において，係数は一般に y の分数式で，剰余も同様である．それらの分数式の分母は C における x の最高次の項の係数の冪である．よって分母を払って，次のような等式を得る．

$$\lambda B = CQ_1 + D,$$

同様に

$$\mu C = DQ_2 + E,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho K = LQ_{k-1} + M,$$

$$\sigma L = Q_k M.$$

ただし $\lambda, \mu, \cdots, \rho, \sigma$ は y のみの多項式，その他は，x, y の多項式である．

いま M に属する原始多項式を M_0 とすれば ($M = \nu M_0$)，M_0 は σL の約数，したがって L の約数である．したがってまた M_0 は ρK の約数，したがって K の約数である．しだいにこのようにさかのぼって，M_0 が B, C の公約数であることがわかる．逆に B, C の公約数は D, $E, \cdots, M$ の約数であるから，M_0 はすなわち B, C の最大公約数に属する原始多項式である．

ゆえに，いま B, C が互いに素であるときは，M_0 は定数であり，したがって M は y のみの多項式である．この場合に AC が B で割り切れるならば，上の各等式に A を乗じて

$$\lambda AB = ACQ_1 + AD,$$

$$\mu AC = ADQ_2 + AE,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho AK = ALQ_{k-1} + AM$$

を得るから，$AD, AE, \cdots, AM$ は B で割り切れる．ゆえに $A=\alpha A_0$，$B=\beta B_0$，$C=\gamma C_0$ とおいて A_0, B_0, C_0 を原始多項式とすれば，AM が B で割り切れ，M が y のみの多項式であるから，A_0 が B_0 で割り切れる．

さて仮定によって B と C は互いに素であるから，β, γ は y のみの多項式として，互いに素である．しかるに AC すなわち $\alpha\gamma A_0C_0$ が B すなわち βB_0 で割り切れるから，$\alpha\gamma$ は β で割り切れる．ゆえに一つの変数の多項式として，α が β で割り切れる（定理4.5）．ゆえに $A=\alpha A_0$ は $B=\beta B_0$ で割り切れる．すなわち定理4.5は二つの変数の場合においても証明され，したがって本節の初めに掲出した分解の一意性が確定したのである．

3.　二つ以上の変数の多項式の既約因子への分解を根拠にすれば，その整除に関する理論が簡明に組み立てられることは，あたかも一つの変数の場合に一次因数を用いる（または整数の場合に素因数を用いる）のと同様である．たとえば多項式 $A(x,y)$，$B(x,y)$ は定数因子を考えないならば，ただ一つの最高次の公約数をもち，それはすべての公約数で割り切れる．これがすなわちA，B の最大公約数である．

既約因数への分解が可能でも，その実行は困難である．Euclid の法式によって，A，B の最大公約数を求める方法は定理4.9の証明中に述べたが，そこでは既約因数への分解の一意性を証明する手段としたのであったから，ここに結論だけを再説する．$A(x,y)$，$B(x,y)$ を一つの変数たとえば x の降冪に排列して，y のみの多項式であるその係数の最大公約数でくくって，

$$A=\alpha A_0, \qquad B=\beta B_0$$

とする．A_0，B_0 はすなわち，いわゆる原始多項式である．いま求める最大公約数 M も同様に x に関する原始多項式と，y のみを含む乗数とに分解して，$M=\mu M_0$ とおけば，μ は α, β の最大公約数として求められる．M_0 を求めるには A，B（または A_0, B_0）を x の多項式として Euclid の法式を行なって，除法に際して出て来るべき y のみを含む分母を払いながら互除法を続行して，最後の除数を求めるならば，それに対応する原始多項式がすなわち M_0 である．もし最後の除数が x を含まないならば，$M_0=1$ とするのであ

る．このように μ と M_0 とが別々に Euclid の法式によって求められるのである．

4.　上の理論は，数学的帰納法によって任意数の変数の多項式の上に拡張することができる．n 個の変数 $x, y, z, \cdots$ の多項式を x の冪にしたがって排列すれば，係数は $n-1$ 個の変数 $y, z, \cdots$ の多項式であるが，変数 $n-1$ 個の場合には，既約因子への分解の一意性がすでに証明され，したがって最大公約数の理論が完成されているものと仮定すれば，前に説明した一変数から二変数に移る方法をそのまま襲用して，変数 n 個の場合にも，上掲の諸定理が成り立つことを証明するのになんらの困難もないであろう．

ここでも x に関する原始多項式の積が原始多項式であることを証明する必要が生ずる．この場合には，定理 4.7 で素数 p を用い，また二元の場合に y の一次式を用いたところを，$y, z, \cdots$ の既約多項式でおき換えればよい．困難はないといっても，一歩一歩各論点に当って見ないと，よくはわかるまい．

〔**問題 1**〕　多項式 $F(x, y, z)$ が二つの因数 Φ, Ψ に分解され，Φ, Ψ は x に関しては整函数，y, z に関しては有理函数であるとすれば，$F(x, y, z)$ は x, y, z に関する二つの多項式の積に分解される．

〔解〕　定理 4.7 と同様．$\Phi(x, y, z)=\varphi(y, z)\Phi_0(x, y, z), \Psi(x, y, z)=\psi(y, z)\Psi_0(x, y, z)$ とおいて $\varphi(y, z), \psi(y, z)$ は y, z に関する有理式，$\Phi_0(x, y, z)$，$\Psi_0(x, y, z)$ は x, y, z に関する多項式で，かつ x に関しては原始多項式であるとする．また $F(x, y, z)=f(y, z)F_0(x, y, z)$ とおいて，$f(y, z)$ は y, z に関する多項式，$F_0(x, y, z)$ は x に関して原始多項式とする．しからば

$$F=\Phi\Psi \qquad \text{すなわち} \quad fF_0=\varphi\psi\Phi_0\Psi_0$$

から，$f=\varphi\psi$，$F_0=\Phi_0\Psi_0$ を得る．定数因子は適宜に分配するのである．すなわち $\varphi\psi$ は y, z に関する多項式であるから，それを Φ_0 または Ψ_0 に繰り込めば，問題で要求されているような分解が成就する．

5.　最後に次の定理を添えておく．

〔**定理 4.10**〕　変数 $x, y, z, \cdots$ に関する既約な多項式 $f(x, y, z, \cdots)$ を0にするような $x, y, z, \cdots$ のすべての値に対して，多項式 $g(x, y, z, \cdots)$ が常に0になるならば，g は f で割り切れる．

〔**証**〕　g が f で割り切れないとすれば，f は既約であるから，g と f とは互いに素でなければならない．ゆえに

$$Pg-Qf=\varphi \qquad (1)$$

のような恒等式が成り立つ．P, Q は $x, y, z\cdots$ の多項式，φ は $y, z, \cdots$ のみの多項式で，それは恒等的には 0 でない．

よって $y, z, \cdots$ に適当な値 $y_0, z_0, \cdots$ を与えて $\varphi(y_0, z_0, \cdots)\neq 0$ とすることができる．そのような値を f に持ち込めば，f は変数 x のみの多項式になるから x に関する根がある．それを x_0 とすれば，$f(x_0, y_0, z_0, \cdots)=0$ であるから，仮定によって $g(x_0, y_0, z_0, \cdots)=0$ になる．しからば（1）から $\varphi(y_0, z_0, \cdots)=0$ を得て，上の $y_0, z_0, \cdots$ に関する仮定に矛盾する．

ただし f を x の冪に排列するとき，

$$f=A(y, z, \cdots)x^n+B(y, z, \cdots)x^{n-1}+\cdots+L(y, z, \cdots)$$

になるとする．$y, z, \cdots$ に $y_0, z_0, \cdots$ を代入するとき，f において x を含む項が消えてしまえば，上の x_0 が求められないかも知れない．よって初めに $y_0, z_0, \cdots$ を定めるときに，$A(y_0, z_0, \cdots)\neq 0$ になるようにしておきたいのであるが，A は恒等的には 0 でないのだから，$A\varphi\neq 0$ になるように y_0，z_0 を取ればよい．

〔**問題 2**〕 上の定理の仮設から，f が既約であるという一条を除けば，g は f の各既約因数で割り切れるが，必ずしも f では割り切れない（たとえば $f=\varphi^2\psi^3$，$g=\varphi\psi\theta$ のような場合がある）．

〔解〕 f の任意の既約因数を φ とし，$f=\varphi f_1$ とおけば，$\varphi=0$ になるとき $f=0$ になり，したがって仮定によって $g=0$ になるから，定理 4.10 によって g は φ で割り切れる．

〔**問題 3**〕 斉次なる多項式 $F(x, y, z, \cdots)$ が可約ならば，各因数が斉次である．

〔解〕 $\Phi(x, y, z, \cdots)$，$\Psi(x, y, z, \cdots)$ を x, y, z, $\cdots$ に関して m 次，n 次とし，同次の項をまとめて

$$\Phi=U_m+U_{m-1}+\cdots+U_0, \qquad \Psi=V_n+V_{n-1}+\cdots+V_0$$

とする．すなわち一般に U_α，V_β は斉次でそれぞれ α 次，β 次とする．しからば

$$\Phi\Psi=U_mV_n+(U_mV_{n-1}+U_{m-1}V_n)+(U_mV_{n-2}+U_{m-1}V_{n-1}+U_{m-2}V_n)+\cdots+U_0V_0.$$

仮定によって，U_m, V_n は恒等的には 0 でないから，$\Phi\Psi$ は $m+n$ 次である．もしも Φ が斉次でないならば，恒等的に 0 でない最低次の部分を U_μ とする．すなわち

$\mu<m$. また Ψ において最低次の部分を V_ν とする．すなわち $\nu\leqq n$. しからば $\Phi\Psi$ は $U_\mu V_\nu$ なる $\mu+\nu$ 次の部分を含み，$\mu+\nu<m+n$ であるから，$\Phi\Psi$ は斉次でない．対偶が問題掲出の定理である．

〔**問題 4**〕 多項式 $x^3+y^3+z^3-3\lambda xyz$ が可約であるのは $\lambda^3=1$ なる場合に限る．すなわち $\rho=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とすれば，$\lambda=1$, ρ, ρ^2 であるときに限る．その場合に与えられた多項式は三つの一次因子に分解される．

〔解〕 $\lambda=1$ のとき　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\rho y+\rho^2 z)(x+\rho^2 y+\rho z)$ なることはよく知られている．

いま与えられた多項式が可約ならば，その一次因数を $x+py+qz$ とすれば，この多項式は y, z に $\rho y, \rho^2 z$ または $\rho^2 y$, ρz を代入しても変わらないことから，$x+p\rho y+q\rho^2 z$, $x+p\rho^2 y+q\rho z$ なる一次因子をもたねばならない．

したがって

$$x^3+y^3+z^3-3\lambda xyz=(x+py+qz)(x+p\rho y+q\rho^2 z)(x+p\rho^2 y+q\rho z)$$
$$=x^3+p^3y^3+q^3z^3-3pqxyz.$$

ゆえに $p^3=1$, $q^3=1$, したがって $\lambda=pq$ は 1 の 3 乗根でなければならない．よって $\lambda=1$ のほかは

$$x^3+y^3+z^3-3\rho xyz=(x+y+\rho z)(x+\rho y+z)(x+\rho^2 y+\rho^2 z),$$

または

$$x^3+y^3+z^3-3\rho^2 xyz=(x+y+\rho^2 z)(x+\rho y+\rho z)(x+\rho^2 y+z).$$

第5章　対称式，置換

§26. 基本対称式

1.　n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する有理式において，それらの変数をいかなる順序におき換えてもその式が変わらないならば，それをこれらの変数の**対称式**という．

後に説明するように対称な有理式は対称な多項式の商として表わすことができるから，本節では多項式のみを取り扱う．すなわち単に対称式というのは，対称な多項式を指すのである．

たとえば $x_1+x_2+\cdots+x_n$ または $x_1 x_2 \cdots x_n$ などは最も簡単な対称式である．

対称式が方程式論で重要なのは，方程式の根と係数との関係に基づく．n 次の方程式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とすれば，恒等的に

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

右辺の積を展開して，係数を比較すれば

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n &= -a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n &= a_2, \ \cdots \\ \sum x_1x_2\cdots x_k &= (-1)^k a_k, \ \cdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n a_n, \end{aligned}$$

$\sum$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の中 k 個ずつを取って掛け合わせた $\binom{n}{k}$ 個の積の上にわたるのである．

これらはいずれも $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式である．これを**基本対称式**という．基本というのは，すべての対称式が，これらの n 個の対称式の整式として表わし得るからである．

2. 対称式 $S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

$$Cx_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n} \qquad (e_1, e_2, \cdots, e_n \geqq 0)$$

のような項を含むならばこの項における $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の順序を換えて作られる

$$Cx_\alpha^{e_1}x_\beta^{e_2}\cdots x_\lambda^{e_n}$$

のような項が同一の係数 C をもって必ず S の中に含まれなければならない．$\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ は $1, 2, \cdots, n$ なる番号の順列である．このように，一つの項から変数のおき換えによって生ずる項を同型の項という．項の型は各変数の指数 e_1, $e_2, \cdots$, e_n によって定まるのであるが，同型の項の中には最大の指数が x_1 につき，第二の大きさの指数が x_2 につくというように変数の番号と指数の大小の順序とが一致するものが必ずあるはずであるから，項の型を示す指数の組合せ

$$(e_1,\ e_2, \cdots,\ e_n)$$

においては

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_n$$

としてさしつかえない．

同型の項をことごとく加えた和は，すでに一つの対称式である．これを単型の対称式という．すべて対称式は単型の対称式に定数係数を乗じたものの和に分解することができる．

たとえば基本対称式，同次冪の和 $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ などは単型である．指数 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ がすべて相異なるときには，同型項の数は変数の順列の数すなわち $n!$ に等しいが，指数の中に相等しいものがあれば，それよりは少ない．

たとえば $n=3$ のとき x_1, x_2, x_3 の代わりに x, y, z を用いて

$(3, 2, 1)$　$\sum x^3y^2z = x^3y^2z + x^3yz^2 + x^2y^3z + x^2yz^3 + xy^3z^2 + xy^2z^3$

$(2, 2, 0)$,　$\sum x^2y^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$.

単型対称式に次のようにして順位をつけることができる．すなわちまず最大指数の大小によって，その大きいものを高位とし，小さいものを低位とする．

最大指数が相等しいときには，第二の大きさの指数の大小によりまた第一，第二の指数がともに相等しいときには，第三の大きさの指数の大小によるというようにして，順位の高低を定める．すなわち，いろは順に語を並べるのと同様である．いわゆる辞書式順序である．この規定によれば，最低位の対称式は $(0,0,\cdots,0)$ で，それは定数，その次は $(1,0,\cdots,0)$, $(1,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(1,1,\cdots,1)$ で，それらはすなわち基本対称式，$\sum x_1$，$\sum x_1x_2,\cdots,x_1x_2\cdots x_n$ である．またその次は $(2,\ 0,\cdots,0)$ で，それは $S_2=\sum x_1^2$．その次は $(2,1,0,\cdots,0)$ で，それは $\sum x_1^2x_2$．など．

3.　このようにしておいて，対称式に関する基本定理の説明に取りかかる．

〔**定理 5.1**〕　**整なる対称式 $S(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ を基本対称式 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ の整函数として次のように表わすことができる．**

1°)　$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)=G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

2°)　しかもその表わし方はただ一通りに限る．すわわち一つの S に対しては，ただ一つの G が可能である．

3°)　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ に関する G の次数は $S(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ における一つの変数の最大指数に等しい．

4°)　S が $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して斉次である場合には，G は $a_1,a_2,\cdots,a_n$ に関して斉重で，その重さは S の次数に等しい．

$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ のように番号のついた文字の多項式において，ある項における文字の番号の総和をその重さという．たとえば $a_1{}^2a_2$ の重さは $1+1+2=4$．各項の重さが等しいとき，その多項式を**斉重**という．

5°)　G の中に現われる係数は，S における係数から加法と減法と（および整数倍）によって作られる数である．

たとえば，S における係数が実数ならば，G においても同様，S における係数が整数ならば，G においても同様である．

〔**証**〕　S が単型対称式であるとき，この定理を証明すれば十分である．また低位の単型対称式，たとえば基本対称式それ自身に関しては定理は明白であるから，帰納法を用いることができる．すなわち S の型を $(e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n)$ としてそれよりも低位なすべての単型対称式に関しては定理はすでに証明されたと

仮定する．

さて

$$a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}=\pm(x_1+x_2+\cdots)^{\alpha}(x_1x_2+\cdots)^{\beta}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{\lambda}$$

を展開して，それを単型対称式に分解するならば，最高位の型は

$$(\alpha+\beta+\cdots+\lambda,\ \beta+\cdots+\lambda,\cdots,\lambda)$$

であるが，これが S と同型になるには

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\cdots+\lambda&=e_1,\\ \beta+\cdots+\lambda&=e_2,\\ \cdots\cdots&\\ \lambda&=e_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

すなわち

$$\alpha=e_1-e_2,\ \beta=e_2-e_3,\cdots,\lambda=e_n$$

とすればよい．よって　$\alpha\geqq0,\ \beta\geqq0,\cdots,\ \lambda\geqq0.$

このように $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ を定めて，また符号 $\pm$ を適当に定めるならば，

$$\pm a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}$$

に含まれる最高位の単型対称式がちょうど S になる．よって

$$S=\pm a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}+S_1$$

とおけば，S_1 は S よりも低位の型の項のみを含む対称式で，かつその係数は整数である．ゆえに仮定によって

$$S_1=G_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

したがって

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\pm a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}+G_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

とすれば

$$S=G(a_1,a_2,\cdots,\ a_n).$$

さて（1）の第一の式によって $\pm a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}$ の次数は e_1 であるが，e_1 はすなわち S における最大の指数である．S_1 は S よりも低位の型の項のみを含

むから，e_1 よりも大きい指数を含むことはできない．仮定によって G_1 の次数は e_1 以下であって，かつ $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}$ なる項が G_1 の項と消し合うことはない（さもなければ S_1 が S と同型の項を含むことになる）．ゆえに G は実際 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関して e_1 次である．これが定理の 3°）である．

次にまた $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}$ の重さは

$$\alpha+2\beta+\cdots+n\lambda$$

で，（1）によってこれは $e_1+e_2+\cdots+e_n$ すなわち S の次数に等しい．S_1 も $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関しては S と同次の斉次式であるから，仮定によって S_1 の各項の重さは $e_1+e_2+\cdots+e_n$ に等しい．ゆえに G は斉重で，4°）も証明されたのである．

5°）は G_1 における係数が整数であることから出る．

残るは 2°）であるが，仮りにある対称式 S が $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の整函数として二通りに表わされるとする．すなわち

$$S=G(a_1, a_2, \cdots, a_n)=G'(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

において G と G' とが $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関して形式的に相等しくないとする．しからば，$G-G'=H$ とおけば

$$H(a_1, a_2, \cdots, a_n)=0$$

にならなければならない．その意味は，H は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関しては形式的に 0 に等しくないが，それを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって表わすならば 0 になるというのである．このようなことが不可能であるというのが 2°）である．

実際，H は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関して形式的に 0 に等しくないとすると，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ にある数値を与えて H が 0 と異なる数値を取るようにすることができる．そのとき方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とするならば，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ のこれらの値に対して，H は 0 にならないのであるから，上の仮定は矛盾である．

（あるいはまた H が $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\cdots a_n^{\lambda}$ という項を含むとすれば，それを $x_1, x_2, \cdots,$

x_n によって表わすときに

$$x_1^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda}x_2^{\beta+\cdots+\lambda}\cdots x_n^{\lambda}$$

という項が生ずる．これと同様な項が H の他の項からは出ないようにするには，$\alpha+\beta+\cdots+\lambda$, $\beta+\cdots+\lambda, \cdots$, λ のなるべく大きいものを取ればよいから，H が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して形式的に 0 になることは不可能である）.

4. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根であるとき，$S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を方程式の係数で表わすには，上文の $a_1, \cdots, a_n$ の代わりに $\dfrac{a_1}{a_0}, \cdots, \dfrac{a_n}{a_0}$ をおかねばならない．そのときには G は $a_0^{e_1}$ を分母とする有理式になる．ゆえに G の意味を少し変えて

$$a_0^{e_1}S(x_1, x_2, \cdots, x_n)=G(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

とおけば，G は $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に関して e_1 次の斉次式になる．e_1 は上にいった通り，S において一つの変数についている指数のうち最も大きいものである．

〔**問題 1**〕 $S=\sum x_1^2x_2^2x_3$ を基本対称式によって表わすこと．

〔解〕 上の証明に用いた方法によって，次々に S を低位の対称式に還元して G を求めることができる．この問題の場合には

$$e_1=e_2=2, \quad e_3=1, \quad e_4=\cdots=e_n=0$$

であるから

$$-a_2a_3=\sum x_1x_2\cdot\sum x_1x_2x_3$$

が S と同型の項を含み，その他は S よりも低位である．すなわち

$$-a_2a_3=S+S_1$$

とおけば，

$$S_1=3\sum x_1{}^2x_2x_3x_4+10\sum x_1x_2x_3x_4x_5.$$

さて

$$-a_1a_4=\sum x_1\cdot\sum x_1x_2x_3x_4=\sum x_1{}^2x_2x_3x_4+5\sum x_1x_2x_3x_4x_5.$$

ゆえに

$$S=-a_2a_3+3a_1a_4-5a_5.$$

ただし，ここで変数は 5 個以上あるものと仮定したのである．もし変数が 4 個ならば $a_5=0$, 変数が 3 個ならば $a_4=a_5=0$ とすべきである．

S における最大指数は 2 であるから，G は 2 次，また S は斉次 5 次式であるから，G は斉重で，各項の重さが 5 である．

〔**問題 2**〕 x_1, x_2, x_3 が三次方程式

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

の根であるとき,

$$S=\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}^2$$

を係数 a_0, a_1, a_2, a_3 によって表わすこと.

〔解〕 S を展開すれば最高位の型として $(4,2,0)$ を得る. ゆえに $a_0{}^4S$ は a に関して斉次の四次式 G である. S は x_1, x_2, x_3 に関して斉次六次であるから, G の各項の重さは 6 である. ゆえに

$$G=a_0{}^4S=Aa_0a_1a_2a_3+Ba_0a_2{}^3+Ca_0{}^2a_3{}^2+Da_1{}^2a_2{}^2+Ea_1{}^3a_3$$

のような形になる. このように, G の次数と重さとから, G の中に含まれ得るすべての項が知れるから, 問題は係数 A, B, C, D, E を計算することに帰する.

これらの係数を求めるには, x_1, x_2, x_3 に特別な五組の値を与えてそれに対する S および a_1, a_2, a_3 を計算して, 両辺に代入する. そうすれば未知の係数 A, B, C, D, E を含む五つの一次方程式を得るから, それから, これらの係数を求めることができるはずであるが, 次のようにして幾分か手数を省くことができる.

まず係数 a_0, a_1, a_2, a_3 の順序を逆にすれば, 根は逆数になるが

$$a_3{}^4\left\{\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\right\}^2=a_0{}^4\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}^2$$

ゆえに G は $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ の順序を逆にしても変わらない. したがって, $B=E_0$ 次に $x_3=0$ とすれば, $a_3=0$ で, x_1, x_2 は二次方程式 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ の根である. このとき

$$a_0{}^4S=a_0{}^4(x_1-x_2)^2(x_1x_2)^2=(a_1{}^2-4a_0a_2)a_2{}^2.$$

ゆえに $D=1$, $B=-4$. そこで, まだわからないのは A と C とだけであるが, 三次方程式を $x^3-1=0$ とすれば, $a_0=1$, $a_1=a_2=0$, $a_3=-1$ で, $x_1=1$, x_2, x_3 は 1 の虚数立方根になり, S は -27 に等しい. これから $C=-27$ を得る. 最後に三次方程式を $(x+1)^3=0$ にすれば, $a_0=a_3=1$, $a_1=a_2=3$ で, $S=0$.

ゆえに $$9A-4.27-27+9^2-4.27=0,$$

したがって $A=18$. ゆえに

$$a_0{}^4S=a_1{}^2a_2{}^2+18a_0a_1a_2a_3-4a_0a_2{}^3-4a_1{}^3a_3-27a_0{}^2a_3{}^2.$$

〔注意〕 三次方程式が $x^3+px+q=0$ ならば

$$S=-4p^3-27q^2.$$

〔**問題 3**〕 変数の同次冪の和

$$S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k \qquad (S_0=n)$$

と基本対称式との間には, 次の関係がある.

$$S_1+a_1=0,$$
$$S_2+a_1S_1+2a_2=0,$$
$$S_3+a_1S_2+a_2S_1+3a_3=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n-1}+a_1S_{n-2}+\cdots+a_{n-2}S_1+(n-1)a_{n-1}=0,$$
$$S_n+a_1S_{n-1}+\cdots+a_{n-1}S_1+na_n=0,$$
$$S_{n+1}+a_1S_n+\cdots+a_{n-1}S_2+a_nS_1=0,\quad\cdots$$

これを Newton の公式という．これらの公式から次々に $S_1, S_2, S_3, \cdots$ を $a_1, a_2, \cdots$ によって表わすことができる．

〔解〕 Newton の公式は

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\cdots+\frac{S_k}{x^{k+1}}+\cdots \qquad (2)$$

から最も容易に得られる．右辺における展開式と $f(x)$ との積を器械的に計算すれば $f'(x)$ を得るから，x^{n-k-1} の係数を比較して，$k\leqq n-1$ のとき

$$S_k+a_1S_{k-1}+\cdots+a_kS_0=(n-k)a_k$$

すなわち

$$S_k+a_1S_{k-1}+\cdots+a_{k-1}S_1+ka_k=0.$$

また $k\geqq n$ のとき

$$S_k+a_1S_{k-1}+\cdots+a_nS_{k-n}=0$$

を得るのである．

Newton の公式によって，k の二，三の値に対する S_k を a で表わせば次のようになる．

$$S_1=-a_1,$$
$$S_2=a_1^2-2a_2,$$
$$S_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3,$$
$$S_4=a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2-4a_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

また逆に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $S_1, S_2, \cdots, S_n$ によって表わすこともできるが，その場合には係数の中に分数が現われる．

〔注意〕 (2) は

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum\frac{1}{x-x_1},$$

$$\frac{1}{x-x_1}=\frac{1}{x}+\frac{x_1}{x^2}+\frac{x_1^2}{x^3}+\cdots+\frac{x_1^{m-1}}{x^m}+\frac{x_1^m}{x^m(x-x_1)}$$

から出る　無限級数を嫌うならば

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\cdots+\frac{S_{m-1}}{x^m}+\frac{g(x)}{x^m f(x)}$$

を用いればよい．m はどのようにも大きく出来るから，Newton の公式がどこまでも出る．$g(x)$ は $n-1$ 次の多項式である．

§ 27. 判 別 式

対称式の例として，方程式論で重要な判別式をあげることができる．n 箇の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の二つずつの差の積を

$$\begin{aligned} P=&(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\\ &(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &(x_{n-1}-x_n) \end{aligned}$$

とする．ここでは小さい番号の x を被減数にして差を書いたが，もしもそうしないならば，P の代わりに $-P$ が生じ得る．たとえば，上の P の式で x_1 と x_2 とを交換すれば，第一の因子 x_1-x_2 は符号が変わり，その他の第一行の各因子と第二行の各因子とは，互いにその位置を交換し，第三行以下の因子は一つも変わらないから P は $-P$ になる．x_1, x_2 でなくても，任意の二つの x，たとえば x_h と x_k とを交換しても，P は $-P$ になることは見やすい．実際，P において変数 $x_1, \cdots, x_n$ の順序を変えて x_h, x_k を第一，第二の位置においたときに生ずる式を P' とすれば，$P'=\pm P$．しかるに P' において第一，第二の変数である x_h, x_k を交換すれば，上にいったように，P' は $-P'$ になるから，P もやはり $-P$ にならなければならない．

このように，P は対称式ではないが，P^2 は変数の置換によって変わらないはこと明らかである．すなわち P^2 は対称式である．

P^2 を展開すれば，最高位の型の項として $x_1^{2(n-1)}x_2^{2(n-2)}\cdots x_{n-1}^2$ を得るから，いま $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根として，

$$D=a_0^{2(n-1)}P^2$$

とおけば，D は $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に関して $2(n-1)$ 次の斉次式になる．またその式は斉重で，重さは $n(n-1)$ に等しい．

たとえば，$n=2$ とすれば

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2,$$
$$D=a_0^2(x_1-x_2)^2=a_1^2-4a_0a_2$$

$n=3$ のときは，§26，問題 2 において計算した通りである．

D を方程式 $f(x)=0$ または多項式 $f(x)$ の**判別式**という．

〔定理 5.2〕 判別式 D が 0 に等しいことが，$f(x)=0$ が複根をもつために必要かつ十分な条件である．

これは明白である．また D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の対称式として次のように表わすことができる．

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

から

$$f'(x_1)=a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)$$
$$f'(x_2)=a_0(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'(x_n)=a_0(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

よって

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_n).$$

〔問題 1〕 五次方程式 $x^5+px+q=0$ の判別式を求めること．

〔解〕 判別式 D は p^mq^n のような項から成り立って，重さは 20 である．p, q の重さがそれぞれ 4, 5 であるから $4m+5n=20$，したがって $m=5$，$n=0$ または $m=0$，$n=4$．ゆえに $D=\lambda p^5+\mu q^4$，λ，μ は数字係数である．いま $p=0$，$q=-1$ とすれば，$f(x)=x^5-1$，$f'(x)=5x^4$．したがって $D=5^5$．ゆえに $\mu=5^5$．次にまた $p=-1$，$q=0$ とすれば，$f(x)=x^5-x$．根は 0 のほか ±1，$\pm i$ である．ゆえに $D=(-1,\ -i,\ +1,\ +i)^2D'$ で，D' は $x^4-1=0$ の判別式である．それは -4^4 に等しい．すなわち $D=-\lambda=-4^4$．ゆえに $\lambda=4^4$．よって

$$D=4^4p^5+5^5q^4.$$

〔注意〕 五次方程式を一般の形に取れば，判別式は項数 59 の式になる．

〔問題 2〕 $f(x)=0$ を n 次の方程式，D を判別式，M を根の絶対値の限界とすれば，二つの根の差は絶対値において

$$\delta=\frac{|\sqrt{D}|}{(2M)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

以上である．

〔解〕 $\Pi(x_p-x_q)=\sqrt{D}$, $|x_p-x_q|\leqq 2M$ から出る．Sturm の定理によって $f(x)=0$ の根を分離するとき，区間 $(-M, M)$ を上の δ よりも小さい区間に細分すれば，実根の分離は完成する．また $|x|\leqq M$ なる円を $\delta/\sqrt{2}$ を一辺とする方眼に分けるならば，虚根の分離が完成する．すなわち根の分離は手数をいとわなければ必ず完成する．もちろん複根は初めから除いておくのである．

§ 28. 終　結　式

1. $f(x), g(x)$ を m 次と n 次との多項式とし，その根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ および $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ として

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=a_0\prod_{\mu=1}^{m}(x-\alpha_\mu),$$

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=b_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-\beta_\nu),$$

$$R=a_0^n b_0^m\Pi(\alpha_\mu-\beta_\nu)$$

とおく，Π において μ は $1, 2, \cdots, m$, また ν は $1, 2, \cdots, n$ の上にわたるので，すなわち因数 $\alpha_\mu-\beta_\nu$ の数は mn である．

上の $f(x), g(x)$ の因数分解によれば，

$$R=a_0^n g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_m)$$

$$=(-1)^{mn}b_0^m f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).$$

R は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ に関しても，また $\beta_1, \beta_2\cdots, \beta_n$ に関しても対称で，それを $a_0, a_1, \cdots, a_m$ および $b_0, b_1, \cdots, b_n$ によって表わせば，a に関しては斉次 n 次，b に関して斉次 m 次になる．

R を方程式 $f(x)=0$, $g(x)=0$ または多項式 $f(x), g(x)$ の**終結式**という. 終結式とは $f(x)=0$ と $g(x)=0$ とから x を追い出すときの最後の結果を意味するものである.

〔定理 5.3〕 $R=0$ は $f(x)=0$ と $g(x)=0$ とが共通根をもつために必要かつ十分な条件である.

〔注意〕 上の式から見える通り, f と g とを交換すれば R は $(-1)^{mn}R$ になる. すなわち f, g がともに奇数次であるときに限って符号を変える.

2. R は α だけに関して, または β だけに関しては, 斉次でないから, a だけまたは b だけに関しては斉重ではないが, a と b とをいっしょにして重さを取れば, 斉重で, その重さは mn である. それを見るには各根 α, β に任意の係数 t を掛けて見るがよい. そうすれば, R は t^{mn} 倍されるが, 一方において a_h は $a_h t^h$ に, また b_k は $b_k t^k$ に変わるから, R の展開における項

$$a_0^{p_0}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots b_0^{q_0}b_1^{q_1}b_2^{q_2}\cdots$$

には, その重さに等しい $p_1+2p_2+\cdots+q_1+2q_2+\cdots$ を指数とする t の冪が掛かる. この指数は各項とも mn に等しくなくてはならない. ゆえに R の各項は係数 a, b の双方に関しては mn なる重さをもつ.

〔問題 1〕 R を $a_0, a_1, \cdots, a_m$; $b_0, b_1, \cdots, b_n$ なる文字の多項式と見れば, それは分解不可能である (a, b の多項式である二つの因子には分解ができない).

〔解〕 仮りに分解ができるとして $R=R_1R_2$ とおけば, R_1, R_2 は a に関しても, また b に関しても斉次であるから, R_1 および R_2 を a_0, b_0 と $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ および $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ の整式として表わすことができる. R_1, R_2 を独立変数 α, β の函数と見るとき, もし α_1 に β_1 を代入すれば $R=0$, したがって $R_1=0$ または $R_2=0$. いま $R_1=0$ とすれば, R_1 は $\alpha_1-\beta_1$ という因子をもつ. しかるに R_1 は α および β に関して対称でなければならないから, R_1 は $\alpha_\mu-\beta_\nu$ という mn 個の因子をもたねばならない. ゆえに R_1 が R に等しくないとすれば, R_2 は a_0 または b_0 という因子のみを含まねばならない. すなわち R が a_0 または b_0 という因子を含まねばならない. しかるに R は $a_0{}^n b_n{}^m$, $b_0{}^m a_m{}^n$ という項を含むから, それは不可能である.

〔注意〕 判別式 D が同様の意味において分解不可能であることも, 同じように証明される.

〔問題 2〕 一次式 a_0x+b_1，b_0x+b_1 の終結式は

$$a_0b_1-a_1b_0.$$

一般に n 次の多項式 $f(x)$ と b_0x+b_1 との終結式は

$$b_0^n f\left(-\frac{b_1}{b_0}\right).$$

〔解〕 $g(x)=b_0x+b_1$，$\beta=-b_1/b_0$.

〔問題 3〕 二次式

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, \qquad g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

の終結式を次の形に書くことができる．

$$R=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1).$$

〔解〕

$$\begin{aligned}R&=b_0{}^2(a_0\beta_1{}^2+a_1\beta_1+a_2)(a_0\beta_2{}^2+a_1\beta_2+a_2)\\&=a_0{}^2(b_0\beta_1\beta_2)^2+a_0a_1b_0{}^2\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)+a_1{}^2b_0{}^2\beta_1\beta_2+a_0a_2b_0{}^2(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2)\\&\qquad+a_1a_2b_0{}^2(\beta_1+\beta_2)+a_2{}^2b_0{}^2\\&=a_0{}^2b_2{}^2-a_0a_1b_1b_2+a_1{}^2b_0b_2+a_0a_2(b_1{}^2-2b_0b_2)-a_1a_2b_0b_1+a_2{}^2b_0{}^2\\&=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1).\end{aligned}$$

§ 29. 判別式および終結式の不変性

1. 方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とすれば

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

いま一次変形

$$x=\frac{\alpha x'+\beta}{\gamma x'+\delta} \tag{1}$$

によって未知数を x から x' に変えるために，この一次式を $f(x)$ に代入して $(\gamma x'+\delta)^n$ を掛けて分母を払えば，

$$a_0(\alpha x'+\beta)^n+a_1(\alpha x'+\beta)^{n-1}(\gamma x'+\delta)+\cdots+a_n(\gamma x'+\delta)^n=0.$$

これを整頓して

$$f'(x')=a_0{}'x'^n+a_1{}'x'^{n-1}+\cdots+a_n{}'=0$$

を得るとする（f' は導函数を示すのではないが，ここではまぎれる心配はな

い). $a_0', a_1', \cdots, a_n'$ は $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に関しては一次，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関しては n 次である．特に

$$a_0' = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1}\gamma + \cdots + a_n\gamma^n, \cdots\cdots \tag{2}$$
$$a_n' = a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1}\delta + \cdots + a_n\delta^n.$$

また変形後の方程式 $f'(x')=0$ の根を $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ とすれば

$$x_1 = \frac{\alpha x_1' + \beta}{\gamma x_1' + \delta},\ x_2 = \frac{\alpha x_2' + \beta}{\gamma x_2' + \delta} \cdots,\ x_n = \frac{\alpha x_n' + \beta}{\gamma x_n' + \delta}.$$

さて $f(x), f'(x')$ の判別式をそれぞれ D, D' とするとき，D と D' との間にいかなる関係があるか．

D が 0 になるときには $f(x)=0$ は複根をもつ，したがって $f'(x')=0$ も複根をもつ．ゆえに D' も 0 である．また逆に D' が 0 ならば，$f'(x')$，したがってまた $f(x)$ も複根をもつから，D も 0 である．D は係数 a の整函数，また D' は係数 a' の整函数で，a' は a に関して一次であるから，D' はやはり a の整函数で，しかも a に関して D と同次である．そうして D を 0 とする a の値は同時に D' も 0 とし，かつ D は a という文字に関しては分解することのできない函数であるから (149 頁，注意)，D' は D で割り切れなければならないが (定理 4.10)，次数の関係から，D' は D と定数因子においてのみ異なり得る．

これは明白であるが，あまりに一般的な定理を基礎にしての議論であるから，別に器械的の計算によってその結論を験証して見ることにする．その計算もきわめて簡単である．

(1) から

$$x_1' = \frac{\delta x_1 - \beta}{-\gamma x_1 + \alpha},\quad x_2' = \frac{\delta x_2 - \beta}{-\gamma x_2 + \alpha},\ \cdots.$$

ゆえに

$$x_1' - x_2' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_1 - x_2)}{(\alpha - \gamma x_1)(\alpha - \gamma x_2)},\ \cdots.$$

よって

$$D' = a_0'^{2(n-1)}\Pi(x_1' - x_2')^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{n(n-1)} \frac{a_0'^{2(n-1)}\Pi(x_1 - x_2)^2}{[\Pi(\alpha - \gamma x_1)]^{2(n-1)}}.$$

さて

$$\Pi(\alpha-\gamma x_1)=\gamma^n\Pi\left(\frac{\alpha}{\gamma}-x_1\right)=\gamma^n\cdot\frac{1}{a_0}f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right),$$

また（2）から

$$a_0'=\gamma^n f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right),$$

よって

$$D'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n(n-1)}D.$$

すなわち上述の通りで，かつ D' を得るために D に掛けるべき定数因子が求められたのである．

また $f(x)$ のほかに $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ においても同一の一次変形（1）を行なって $g'(x')=b_0'x'^m+b_1'x'^{m-1}+\cdots+b_m'$ を得るとするとき，$f(x)$, $g(x)$ の終結式を R, $f'(x')$, $g'(x')$ の終結式を R' とすれば，R と R' との間に次の関係がある．

$$R'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{mn}R.$$

付記 このように多項式の変数に一次変形を行なうときには，多項式を斉次の形に書くのが便利である．一般に斉次の多項式を代数形式といい，変数の数によって二元（binary），三元（ternary），四元（quaternary）などという．一つの変数の多項式を斉次の形に書けば二元の代数形式を得る．代数形式論（または不変式論ともいう）では二元の代数形式を表わすときに，係数を二項係数に乗じた形におくのが便利である．すなわち

$$f(x,y)=a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}y+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{1}a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n.$$

この形式において

$$x=\alpha x'+\beta y',$$
$$y=\gamma x'+\delta y'$$

を代入すれば，$f(x,y)$ は x',y' に関する n 次の代数形式になる．

$$f'(x',y')=a_0(\alpha x'+\beta y')^n+\binom{n}{1}a_1(\alpha x'+\beta y')^{n-1}(\gamma x'+\delta y')$$
$$+\binom{n}{2}a_2(\alpha x'+\beta y')^{n-2}(\gamma x'+\delta x')^2+\cdots+a_n(\gamma x'+\delta y')^n$$

$$=a_0'x'^n+\binom{n}{1}a_1'x'^{n-1}y'+\binom{n}{2}a_2'x'^{n-2}y'^2+\cdots+a_n'y_n'.$$

ここで $a_0', a_1', \cdots, a_n'$ は $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に関しては斉次一次，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関しては斉次 n 次である．

さて原形式 $f(x, y)$ の係数の有理函数 $J(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ があって，変形後の形式 $f'(x', y')$ の係数から同一の有理函数 $J(a_0', a_1', a_2', \cdots, a_n')$ を作るとき，その間に

$$J(a')=C\cdot J(a) \tag{3}$$

のような関係があるときには，J を $f(x, y)$ の**不変式** (invariant) という．ただし C は係数 a を含まない定数で，一次変形の係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のみを含むものである．また原係数および変形後の係数の代表として a, a' なる文字をおいたのである．

たとえば判別式 D は不変式である．

また二つ以上の形式 $f(x, y)$，$g(x, y)$ に同一の一次変形を行なうとき，原形式 g の係数を b なる文字で表わし，変形後の係数を b' なる文字で表わすこととして，

$$J(a', b')=C\cdot J(a, b) \tag{4}$$

のような関係が成り立つときには，$J(a, b)$ を f, g の不変式（連合不変式）という．終結式がその一例である．

形式の係数のみでなく，変数をも含む有理式 $K(a; x, y)$ において，J と同様に

$$K(a'; x', y')=C\cdot K(a; x, y) \tag{5}$$

のような関係があるときは，K を f の**共変式** (covariant) という．あるいはまた K が二つ以上の形式 $f, g, \cdots$ の係数を含むこともあり，また二組以上の変数を含むこともある．ただしその場合には，各組の変数は同一の一次変形を受けるものとする．

共変式の例としては f のポーラー

$$P_1(\xi, \eta;\ x, y)=\frac{1}{n}\left\{\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right\},$$

$$P_2(\xi,\eta;\ x,y)=\frac{1}{n(n-1)}\left\{\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\xi\eta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\},$$

または f の Hesse 形式

$$\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}.$$

などをあげることができる．

上の定義における定数因子 C は，実際は一次変形の係数の行列式 $\alpha\delta-\beta\gamma$ のある冪である．判別式および終結式の場合には，実際その通りであったが，それを一般に証明することも容易である．たとえば不変式（3）において a_0', $a_1',\cdots,a_n'$ は $a_0,a_1,\cdots,a_n$ に関しては斉次一次で，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に関しては斉次 n 次であるから，C は $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に関する斉次式である．よってそれを

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

としるす．さて逆の一次変形

$$x=\frac{1}{r}(\delta x'-\beta y')$$
$$(r=\alpha\delta-\beta\gamma)$$
$$y=\frac{1}{r}(-\gamma x'+\alpha y')$$

を行なえば a' は a に返り，$J(a')$ は $J(a)$ になるから，（3）によって

$$J(a)=C\left(\frac{\delta}{r},\ \frac{-\beta}{r},\ \frac{-\gamma}{r},\ \frac{\alpha}{r}\right).\ J(a'),$$

したがって

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot C\left(\frac{\delta}{r},\ \frac{-\beta}{r},\ \frac{-\gamma}{r},\ \frac{\alpha}{r}\right)=1.$$

C は斉次であるから，それを m 次とすれば

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot C(\delta,-\beta,-\gamma,\alpha)=r^m$$

ゆえに

$$C=Nr^{\frac{m}{2}}.$$

N はある数字係数である．しかるに $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$($x'=x$, $y'=y$) とすれば $r=1$, $C=1$. ゆえに $N=1$. また m は偶数でなければならない．（4），（5）などの場合も同様である．

〔問題 1〕 f を不斉次の形に取って，その根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とするとき，根の対称式

$$a_0^m \sum (\alpha_h - \alpha_k)(\alpha_{h'} - \alpha_{k'})(\alpha_{h''} - \alpha_{k''})\cdots$$

の各項が根の差の積で因数中に各根が同じ回数 (m) ずつ含まれているときは，この対称式を f の係数の整式として $J(a)$ の形に表わせば，それは一つの不変式である.

もし一般項の積に $(x-\alpha_i)$ のような因子が含まれるときには，共変式が得られる.

〔解〕 不変性の証明は上の D の場合（151～152 頁）と同様の計算による.
たとえば，f が四次式のとき

$$a_0^2 \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \qquad 3\text{ 項の和}$$

$$a_0^3 \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4) \qquad 6\text{ 項の和}$$

は不変式である．これらの不変式は四次方程式の解法において出て来る（§ 36).

〔問題 2〕 二つの二次式

$$f(x) = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 \equiv a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),$$

$$g(x) = b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2 \equiv b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2)$$

に関して

$$\varDelta = a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1$$

は不変式で，また

$$F = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x + (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

は共変式である.

$\varDelta = 0$ は $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ が調和であるための条件である．また $F=0$ の根は α_1, α_2 をも β_1, β_2 をも調和に分離する.

〔解〕 $k = \dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1} : \dfrac{\alpha_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2}$ とおけば

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1) + (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}$$

$$= \frac{2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{-(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)}.$$

ゆえに
$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2=\frac{\Delta^2}{4(a_1{}^2-a_0a_2)(b_1{}^2-b_0b_2)}.$$
ゆえに $\Delta=0$ は $k=-1$（調和）であるために必要かつ十分な条件である．
また f，F から Δ を作れば，それは 0 になる：
$$a_0(a_1b_2-a_2b_1)+a_2(a_0b_1-a_1b_0)-a_1(a_0b_2-a_2b_0)=0.$$
ゆえに F の二根は α_1，α_2 を調和に分離する．β_1，β_2 に関しても同様．

調和の関係は一次変形によって変わらないから（§ 6），Δ，F が不変性をもつのである．

§ 30.　置　　換

1.　相異なる n 個の物を一つの順序から他の順序におき換えることを**置換**という．ここで置換の卑近な二，三の性質について解説を試みるに当たって，置換される物に適宜に $1,2,3,\cdots,n$ の番号をつけて，これらの物をその番号で示すことにする．

n 個の物を $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$ の相異なる順列に並べることができて，置換によって 1 2 3 … n なる順列から任意の順列に移ることができるから，置換の総数は $n!$ である．ただしこの中にはいわゆる恒等置換をも数える．すなわち各々の物を元のままの位置において少しも移動させない場合も，やはり一つの置換と見なすのである．

置換の記法は次のようにする．たとえば 12345 を 35214 にする置換を
$$P=\binom{12345}{35214}$$
としるす．上がもとの順列で，下が置換を行なった後の順列である．もし上の列と下の列とを交換すれば，それは逆の置換を表わすのである．上のように，置換を一つの文字 P で表わすならば，その逆の置換を P^{-1} で表わす，すなわち
$$P^{-1}=\binom{35214}{12345}.$$
またはこれを次のようにしるしても同じことである．
$$P^{-1}=\binom{12345}{43152}.$$

これは上の列が番号順になるように，上下に重なった5組の数字を並べかえたまでである．

2. 置換 P を行なった後，更に置換 Q を行なうならば，その効果はある一つの置換と同じである．その置換を R とするとき，この関係を次のようにしるす．

$$PQ=R.$$

このようにして置換 P, Q から置換 R を作ることを**置換の結合**という．

たとえば

$$P=\begin{pmatrix}12345\\35214\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}12345\\41523\end{pmatrix}$$

ならば，

$$PQ=\begin{pmatrix}12345\\53142\end{pmatrix}.$$

1 は P によって 3 でおき換えられ，その 3 は Q によって 5 でおき換えられるから，結局 1 は 5 でおき換えられる．ゆえに PQ においては，1 の下に 5 が来る．その他も同様である．

置換の結合においては，交換の法則は一般に成り立たない．すなわち PQ と QP とは同一でない．たとえば上の例で

$$QP=\begin{pmatrix}12345\\13452\end{pmatrix}\neq PQ$$

結合の法則は置換にも当てはまる，すなわち $(AB)C=A(BC)$．よって括弧を略して ABC としるす．三つより多くの置換に関しても同様である．

いま置換 A によって，数字 p が q でおき換えられ，その q が B によって r でおき換えられ，r が C によって s でおき換えられるとする．しからば，AB によって，p が r でおき換えられるから，$(AB)C$ によって，p は s でおき換えられる．一方，p は A で q に換わり，q は BC で s に換わるから，p は $A(BC)$ によって，やはり s でおき換えられる．どの文字 p に関しても同様だから，$(AB)C=A(BC)$．

同一の置換をいくつも結合する場合には，冪の記法を襲用する．たとえば $PP=P^2$，$PPP=P^3$，など．

〔問題 1〕

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$$

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1},\ \text{など}.$$

〔解〕 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$　　結合法則による．

$=AA^{-1}$　　BB^{-1} は恒等置換だから．

$=1.$　　1 は恒等置換を表わす．

このように AB に $B^{-1}A^{-1}$ を結合すれば，恒等置換を得るから，$B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆の置換である．これは一般には $A^{-1}B^{-1}$ とはちがう．$(ABC)^{-1}$ も同様である．

〔注意〕 A^p すなわち $AA\cdots A$（因子 p 個）の逆は $A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}$ すなわち $(A^{-1})^p$ である．これを A^{-p} としるす．これは A の p 乗の逆であるが，A の逆の p 乗でもある．どちらも同じである．

よってまた A^0 は恒等置換を表わすものとして，冪の記法を指数が0および負の整数である場合に拡張する．しからば，一般に

$$A^pA^q=A^{p+q},\qquad (A^p)^q=A^{pq}.$$

ただし，二つ以上の置換に関して，一般に

$$(AB)^p\neq A^pB^p.$$

たとえば，$(AB)^2=ABAB$ で $BA\neq AB$ ならば，これは A^2B^2 とは等しくない．前頁の例の P,Q でためして見るとよい．

3.　n 個の物の中二つ，たとえば a, b だけの位置を交換して，その他の物は動かさないような置換を特に**互換**といい，それを (a,b) で表わす．

たとえば

$$(12)=\begin{pmatrix}1234\cdots n\\2134\cdots n\end{pmatrix}.$$

すべて置換を互換の結合によって作ることができる．

たとえば

$$A=\begin{pmatrix}12345\\35214\end{pmatrix}$$

は 12345 を 35214 でおき換えるのであるが，まず 3 を第一の位置へ来させるために 12345 に互換 (13) を行なえば 32145 を得るから，この互換と置換

$$\begin{pmatrix}32145\\35214\end{pmatrix}$$

とを結合すれば，置換 A を得る．しかるに後の置換では，3 が動いていないから，これは四つの物 1245 の置換である．よってこれを同様に扱かって，ついに A を互換に分解することができる．

結果は次のようになる．

$A=(13)(25)(12)(14)$

	12345
(13)	32145
(25)	35142
(12)	35241
(14)	35214

一つの置換 A を互換に分解する仕方は幾通りもある.

たとえば上の例で，まず (45) を行なって，4 を最後の位置に来るようにしてもよい．また互換の数をなるべく少なくすることを目的としないならば，途中で任意の互換を行なうこともできる．

$$A=(45)(15)(23)(35).$$
$$A=(23)(15)(34)(14)(35)(15).$$

このように，与えられた置換を互換に分解する仕方は限りなくあるが，その結果において，互換の数が奇数であるかまたは偶数であるかは，一定である．

これを証明するのに § 27 の多項式（146 頁）

$$\begin{aligned}P=(x_1-x_2)(x_1-x_3)&\cdots(x_1-x_n)\\ (x_2-x_3)&\cdots(x_2-x_n)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &(x_{n-1}-x_n)\end{aligned}$$

の性質を利用することにしよう．すなわち置換によって動かされるものは n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であるが，ここでは，その番号だけに着眼すればよい．n 個の変数に任意の置換を行なうときに，多項式 P はまったく変わらないか，または $-P$ に変わるかであるから，置換は P を変えないものと，P を $-P$ に変えるものとの 2 種類に分かれる．しかるに § 27 にいった通り，P は二つの変数を互換するごとに，その符号を変えるから，P を変えない置換は偶数の互換の結合であることを要し，P を $-P$ に変えるものは奇数の互換の結合でなければならない．

同時にまたこれら 2 種の置換を区別する規準が得られる．いま一つの順列において大きい数字が小さい数字の前にあることを順位の反転と名づけることにする．

たとえば，順列 35214 では 3 よりも小さい番号 1, 2 が 3 の後にあるから，そこに二つの反転があり，また 5 と 2, 1, 4 との間に三つの反転，2 と 1 との間に一つの反

転があり，すなわち合わせて 6 個の反転がある．

さて $123\cdots n$ に一つの置換を行なうときに生ずる反転の数が偶数ならば，その置換を上の多項式 P に行なえば，因子の中で符号の変わるものが偶数個であるから，その置換は P を変えないが，もし反転の数が奇数ならば，その置換は P を $-P$ に変える．すなわち互換の数の奇数，偶数であるのと，順列中の反転の数の奇数，偶数であるのと同一である．

これによって $n!$ 個の置換を**偶の置換**と**奇の置換**とに区別する．

これら2種類の置換の数は相等しい．すなわち各々 $n!/2$ である．

それを見るには，すべての偶の置換を列挙したと想像して，それらにある一定の互換，たとえば (1, 2) を結合するならば，その結果は相異なる同数の奇の置換であるから，偶の置換の数は奇の置換の数よりも多くはない．また同様に奇の置換の数は偶の置換の数よりも多くはないから，双方同数でなければならない．

以上を総合して次の定理を得る．

〔**定理 5.4**〕 n 個の物の置換 $n!$ 個の中，半数は偶の置換で，半数は奇の置換である．前者は互換の結合で，$1,2,3,\cdots,n$ の間に偶数の反転を生ずる．それを多項式 P の変数に行なうときは，P は変わらない．後者は奇数個の互換の結合で，$1,2,3,\cdots,n$ の間に奇数の反転を生じ，P を $-P$ に変える．

同種の置換二つを結合すれば偶の置換を生じ，異種の置換二つを結合すれば奇の置換を生ずる．二つ以上の置換を結合するとき，それらの置換の中に奇の置換が奇数個あるときに限って，結果が奇の置換である．

任意の置換は互換の結合によって作られるから，一つの多項式が対称式であることを確かめるのに，n 個の変数を $n!$ 個の仕方でおき換えて見るまでもなく，変数を二つずつ互換して，その都度多項式が変わらないことを確かめれば十分である．しかるに，その手数を更に節約することができる．それは次の事実に基づく．

すべて互換，したがってすべての置換は，ある一定の一つの番号，たとえば 1，を含む $n-1$ 個の互換 $(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)$ から結合によって作ること

ができる.

$$(a,b)=(1,a)(1,b)(1,a)$$

$1ab$ は $(1, a)$ によって $a1b$ になり，それが $(1, b)$ によって $ab1$ になり，それに $(1,a)$ を行なえば $1ba$ になる．すなわち 1 は結局元の位置にもどり，a と b とがその位置を交換するのである．

ゆえに変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式が x_1 と他の変数とを互換しても変わらないならば，その多項式は対称式である．

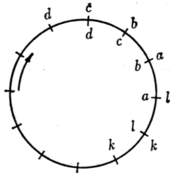
〔例〕 $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である．それを見るには，(x_1, x_2)，(x_1, x_3)，(x_1, x_4) を互換して見ればよい．

4. **循環置換**というのは，$a,b,c,\cdots,k,l$ なる物があるときに，a を b で，b を c で,…, k を l で置き換え，最後の l を最初の a で置き換えるもので，それを $(abc\cdots kl)$ としるす．

$$\begin{pmatrix} abc\cdots kl \\ bcd\cdots la \end{pmatrix}=(abc\cdots kl)=(bc\cdots kla)=\cdots$$

$$=(klabc\cdots)=(labc\cdots).$$

すべて置換は同一の物を含まない循環置換の結合によって作ることができる．



たとえば

$$P=\begin{pmatrix} 123456789 \\ 458923167 \end{pmatrix}$$

において，1 は 4 で置き換えられ，その 4 は 9 で，また 9 は 7 で，7 は 1 でおき換えられる．すなわち 1,4,9,7 が循環的におき換えられる．この中に含まれない 2 から始めて同様に 2,5 なる環を得，また残りの 3 から始めて 3,8,6 なる環を得るから，結局

$$P=(1497)(25)(386).$$

また

$$\begin{pmatrix} 123456789 \\ 345678912 \end{pmatrix}=(135792468).$$

$$\begin{pmatrix} 123456789 \\ 963218547 \end{pmatrix}=(1975)(2684)(3).$$

この例では 3 は移動しない．それは 3，一個で一つの環を作るものと見なして

もよく，また（3）はしるさなくてもよい．

〔**問題 2**〕 $(abc\cdots kl)=(ab)(ac)\cdots(ak)(al)$.

〔**問題 3**〕 偶の置換は三つの物の循環置換の結合によって，しかも二つの特定の物，たとえば 1，2 を含むもののみからの結合によって作られる．

〔解〕 偶の置換は $(12), (13), \cdots. (1n)$ の偶数個の結合である．さて

$$(1a)(1b)=(1a)(12)(12)(1b)=(1a2)(12b). \qquad (\text{問題 } 2)$$

〔**問題 4**〕 置換 P が k_1 個，k_2 個，…，k_n 個の相異なる物の循環置換に分解されるならば，P は $\sum k-n$ 個の互換に分解される．これが P を合成する互換の最小数である．

〔解〕 初めの部分は問題2から直ぐに出る．後の部分は

$$(a_1a_2\cdots a_m)(a_1a_h)=(a_1a_2\cdots a_{h-1})(a_ha_{h+1}\cdots a_m)$$
$$(a_1a_2\cdots a_m)(b_1b_2\cdots b_p)(a_mb_1)=(a_1a_2\cdots a_{m-1}b_1b_2\cdots b_pa_m)$$

から出る．すなわち

$$P=Q(ab)$$

とするとき，a, b が P において同一の環に属するか，または相異なる環に属するかにしたがって $\sum k-n$ なる数は，Q において P におけるよりも 1 だけ減り，または1だけ増す．

§ 31. 交　代　式

1． n 個の変数の多項式が変数にどのような置換を行なっても変わらないときは対称式であるが，その反対に変数の順序を変えるごとに異なる多項式に変わり，全体において $n!$ 個の相異なる形を生ずる場合もある．$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ において係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ がみな相異なるときなど，その例である．これらの二つの極端な場合の中間に，一部分対称の性質をもつ多くの場合があり得るが，その中で最も対称式に近い場合として，変数のすべての置換によって二つの相異なる形を生ずる多項式を考察する．

$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ をこのような多項式とすれば，変数の置換が f を変えないものと，f を f_1 に変えるものとの二組に分かれるというのが仮定である．

f_1 もやはり同じ n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式であるが，f_1 において変数の置換を行なうときに出て来るものは，つまり f から変数の置換によって

出て来るものにほかならないから，それは f または f_1 である．ゆえに f と f_1 とにおいて，同一の置換 S を行なうときには，f も f_1 も変わらないか，あるいは f は f_1 に変わり，f_1 は f に変わるかである（f は変わらないで f_1 が f に変わり，または f は f_1 に変わり，f_1 は変わらないということはあり得ない．さもなくば f または f_1 から S の逆の置換によって二つの異なる多項式が生ずるであろう）．

ゆえに $f+f_1$ はいかなる置換によっても変わらない，すなわち対称式である．また $f-f_1=F$ とおけば，F はある置換によっては変わらないが，ある置換によっては符号だけを変えて $-F$ になる．そこで，まずこのような多項式 F を求めよう．

仮定によって F^2 はいかなる置換によっても変わらないから対称式である．また F 自身は対称式でないから，ある互換によって変わる．すなわち $-F$ になる．いま F は互換 (x_1, x_2) によって $-F$ に変わるとする．すなわち

$$F(x_2, x_1, \cdots, x_n) = -F(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

ゆえに $x_1=x_2$ とすれば，

$$F(x_2, x_2, \cdots, x_n) = -F(x_2, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

したがって $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は (x_1-x_2) で割り切れる．いま F はちょうど $(x_1-x_2)^h$ で割り切れるとすれば，F^2 は $(x_1-x_2)^{2h}$ で割り切れるが，F^2 は対称式であるから，それが $(x_1-x_2)^{2h}$ で割り切れるならば，§27 の多項式 P の $2h$ 乗で割り切れなければならない．したがって F は P^h で割り切れる．よって

$$F = P^h F_1$$

とおけば，F も P もある置換によって符号だけを変え得るに止まるから，F_1 もまた同様である．ゆえに F_1 が対称式でないならば，F_1 はある互換によって $-F_1$ になる．もししからば，前と同様に F_1 は $(x_\lambda - x_\mu)$ のような一次因数をもち，したがって F_1 が P で割り切れることになるのであるが，仮定によって F は因数 x_1-x_2 を h 乗にだけ含むのであるから，F_1 が P で割り切れることは不可能である．ゆえに F_1 は対称式でなければならない．しからば

上の等式において，指数 h は奇数でなければならない（もし h が偶数ならば P^h は対称式，したがって F も対称式になってしまう）．h が奇数ならば，P^{h-1} したがってまた $P^{h-1}F_1$ は対称である．それを S で表わせば

$$F=P\cdot S$$

すなわち問題の多項式 F は P と対称式との積でなければならない．したがって F は偶の置換によっては変わらず，奇の置換によっては $-F$ に変わるものである．このような多項式を**交代式**という．

初めの問題に返って，$f+f_1$ は対称式，$f-f_1$ は PS に等しいから加法によって

$$f=S_1+PS_2$$

を得る． ただし S_1, S_2 は対称式を示す． すなわち f は偶の置換では変わらず，奇の置換では $f_1=S_1-PS_2$ に変わるのである．

この問題で注意すべきことは，ある多項式を変えない置換と，変える置換との区分が任意にはできないことである．上の場合では，f を変えない置換は偶の置換の全部でなければならない．

2. 有理対称式は対称である多項式の商として表わし得ることの証明は，上の問題を応用すれば簡単である．証明すべきことは次の通りである．

f, g が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式で，公約数をもたず，かつ

$$\frac{f}{g}$$

が変数の置換によって変わらないならば，f と g とが別々に対称式である．

いま仮りに f が対称式でないとすれば，f はある互換，たとえば (x_1, x_2) によって変わらねばならない．この互換によって f は f_1 に，また g は g_1 になるとすれば，仮定によって

$$\frac{f}{g}=\frac{f_1}{g_1}.$$

さて f と g は公約数をもたないと仮定したから，f_1, g_1 は f, g で割り切れる：

$$f_1=hf, \qquad g_1=hg.$$

f_1 は変数の置換によって f から生じた多項式であるから，f と同次である．したがって h は定数である．$f_1=hf$ の両辺において再び x_1 と x_2 とを互換すれば，$f=hf_1$．ゆえに $h^2=1$，$h=-1$．したがって $f_1=-f$，$g_1=-g$．すなわち f，g は互換 (x_1, x_2) によって符号を変えるから，前の問題の証明中にあるように，f，g は (x_1-x_2) で割り切れなければならない．これは f, g が公約数をもたないという仮定に矛盾するから，f したがって g は対称式でなければならない．

〔**問題**〕 有理式 f から任意の置換によって二つの相異なる有理式だけ（f または f_1）が生ずるときには，

$$f=S_1+PS_2, \quad f_1=S_1-PS_2.$$

ただし S_1, S_2 は対称な有理式である．

§ 32. 多項式と置換群

1. 多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ から変数の置換 S によって生ずる多項式を Sf または $f|S$ としるす．$f|S$ において，更に置換 S' を行なうのは，つまり f に S と S' とを結合した置換 SS' を行なうのと，効果においては同一である．すなわち*

$$(f|S)|S'=f|SS'.$$

いま f は置換 S によっても，また S' によっても変わらないならば，

$$f|S=f.$$

したがって
$$f|SS'=f|S'=f.$$

すなわち f は置換 SS' によっても変わらない．すなわち f を変えない置換を結合すれば，やはり f を変えない置換が生ずる．ゆえに f を変えない置換の全部を漏れなくあげて，それらを

$$S, \ S', \ S'', \ \cdots \tag{1}$$

とし（この中には恒等置換があり，また各置換の逆の置換，各置換の冪があ

* 記号 Sf を使えば $f|SS'$ のところが $S'(Sf)$ になり，括弧を略して $S'Sf$ とおけば S と S' との順序が逆になって，都合が悪い．

る)，これらの置換を一組として見れば，この組の中にある置換から結合によって生ずる置換は必ずこの組の中に含まれている．このような一組の置換は**群**を成すという．

たとえば，f が交代式ならば，f を変えない置換は偶の置換で，偶の置換の全部は一つの群を成す．これを交代群という．

いま，多項式 f は置換 T によって f_1 に変わるとする：

$$f|T=f_1,\quad f\neq f_1.$$

しからば，(1) の各置換の右に T をつけて作られる結合置換

$$ST,\ S'T,\ S''T,\ \cdots \tag{2}$$

は f を f_1 に変える置換の全体である．実際，$f|ST=(f|S)T=f|T=f_1$ であるが，逆に，$f|Q=f_1$ とするならば，

$$f|QT^{-1}=f_1|T^{-1}=f$$

だから，QT^{-1} は f を変えない置換である．ゆえに $QT^{-1}=S^{(\nu)}$，したがって $QT^{-1}T=S^{(\nu)}T$ すなわち $Q=S^{(\nu)}T$ である．ゆえに (2) が f を f_1 に変える置換の全部である．

このようにして，f から変数の置換によって生ずる相異なる多項式が (f をも入れて) i 個あるとして，それらを

$$f,\ f_1,\cdots,f_{i-1}$$

とすれば，それに応じて，$n!$ の置換が (1)，(2) のような同数の i 組に分かれる．そのうち一組は f を変えない置換の群で，それに属する置換の数 (それを群の位数という) を g とすれば

$$n!=gi$$

なる関係がある．よって次の定理を得る．

〔**定理 5.5**〕 n 個の変数の多項式から，変数の置換によって生ずる相異なる多項式の数 i は (原の多項式をも入れて) $n!$ の約数である．この多項式を変えない置換は群を成し，その置換の数 (群の位数) は $n!/i$ に等しい．

〔**問題 1**〕 上の場合，一般に $f|T_p=f_p$，$(p=1, 2, \cdots, i-1)$ とすれば，f_p を f_q に変える置換の全体は

$$T_p^{-1}ST_q,\ T_p^{-1}S'T_q\cdots,$$

の g 個である．特に f_p を変えない置換は $T_p^{-1}ST_p$ などの g 個である．

〔解〕 $f_p|T_p^{-1}S^{(v)}T_q=f|S^{(v)}T_q=f|T_q=f_q$.

逆に $f_p|Q=f_q$ ならば，$f|T_pQ=f_q$，$f|T_pQT_q^{-1}=f$．ゆえに $T_pQT_q^{-1}=S^{(v)}$ したがって $Q=T_p^{-1}S^{(v)}T_q$.

2. 多項式 f から置換によって生ずる多項式はもちろん同じ変数の多項式であるが，いまそれらの多項式

$$f,\ f_1,\ f_2,\cdots,\ f_{i-1}$$

に任意の置換 P を行なうならば，

$$f|P,\ f_1|P,\cdots,\ f_{i-1}|P$$

はつまり f から置換によって生じた i 個の相異なる多項式であるから，($f_1|P=f|T_1P_1$ など)，全体としては $f, f_1, f_2,\cdots, f_{i-1}$ と同一で，ただ順序において違い得るのみである．

ゆえに $f+f_1+\cdots+f_{i-1}$ は変数の任意の置換 P によって変わらない，すなわち対称式である．$f,f_1,\cdots,f_{i-1}$ の積または一般に任意の対称式に関しても同様である．

〔**定理 5.6**〕 変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の有理式から変数の置換によって生ずる相異なる有理式の対称式は変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して対称式である．

3. 群の理論に深入りするつもりはないが，いま一つの定理をつけ加える．次の章で三次および四次の方程式の解法をわかりやすくするためである．

〔**定理 5.7**〕 有理式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を変えない置換によって，他の有理式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が変わらないならば，

$$\varphi=\frac{a_0+a_1f+a_2f^2+\cdots}{a_0'+a_1'f+a_2'f^2+\cdots}$$

のような恒等式が成り立つ．右辺において分母も分子も f に関する多項式で，a という文字で表わされている係数は $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の対称式である．

〔**証**〕 前と同じ記号を用いて

$$f|T_1=f_1,\cdots,f|T_{i-1}=f_{i-1},$$

また
$$\varphi | T_1=\varphi_1, \cdots, \varphi | T_{i-1}=\varphi_{i-1}$$
とする．
$$F(X)=(X-f)(X-f_1)\cdots(X-f_{i-1})$$
とおいて，右辺を展開すれば，
$$F(X)=X^i+S_1X^{i-1}+S_2X^{i-2}+\cdots+S_i.$$
$S_1, S_2, \cdots, S_i$ は変数 x の対称式である（定理 5.6）．いま
$$F(X)\left\{\frac{\varphi}{X-f}+\frac{\varphi_1}{X-f_1}+\cdots+\frac{\varphi_{i-1}}{X-f_{i-1}}\right\}=G(X) \qquad (1)$$
とおけば，G は X に関する多項式である．左辺の括弧の中の各項において，変数 x に任意の置換を行なえば，項の順序だけが変わり得るに止まることは定理 5.6 と同様であるから，括弧の中，したがってまた $G(X)$ は変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して対称式である．ゆえに $G(X)$ は次のような形の式である
$$G(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_{i-1}X^{i-1}.$$
さて（1）の両辺において $X=f$ とおけば，左辺では $\dfrac{F(X)\varphi}{X-f}$ が $F'(f)\cdot\varphi$, になり（F' は導函数），その他は 0 になるから，
$$F'(f)\cdot\varphi=G(f).$$
ゆえに
$$\varphi=\frac{G(f)}{F'(f)}=\frac{a_0+a_1f+a_2f^2+\cdots+a_{i-1}f^{i-1}}{if^{i-1}+(i-1)S_1f^{i-2}+\cdots+S_{i-1}}.$$
すなわち定理にいう通りである（行掛り上記号は違った）．φ の分母も分子も，f に関して $i-1$ 次以下である．

4. 方程式論において定理 5.6 の応用は広大である．方程式 $F(x)=0$ の根を $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をこれらの根の与えられた有理式とする．すなわち φ なる式は既知で，$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値は未知である．さて $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ から変数の置換によって i 個の相異なる有理式が生ずるならば，それらの対称式，特に基本対称式は，定理 5.6 によって $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関しても対称であるから，方程式 $F(x)=0$ の係数から有理的（四則によって）に求められる．ゆえに未知な $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を根とする i 次の方程式が得ら

れる．この原則の応用によって，次章で述べるように，三次および四次方程式を解くことを得るのである．

また $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, …, $\varphi(x_n)$ を根とする n 次の方程式 $G(y)=0$ も対称式の計算によって求められる．すなわち $i=n$ なる特別の場合である．これを応用して，方程式 $F(x)=0$ を変形することができる．φ なる有理式を適当に選んで，$G(y)$ をある条件に適させることが，その目的である．このような変形を Tschirnhausen の変形という．

特に方程式 $F(x)=0$ の根の間に $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ という関係があるために必要かつ十分な条件は，φ から生ずる上の i 個の有理式の積である対称式 $S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が 0 に等しいことである．この条件 $S=0$ も，対称式の計算によって得られる．

〔**問題 2**〕 方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ の根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平方を根とする方程式を求めること．

〔解〕 求める方程式を $F(y)=y^n+A_1y^{n-1}+\cdots+A_n=0$ とすれば，$A_1=-\sum x_1^2$, $A_2=\sum x_1^2x_2^2$, $A_3=-\sum x_1^2x_2^2x_3^2$, … である．

ただしこの場合には

$$a_0^2F(y^2)=a_0^2\Pi(y^2-x_k^2)=a_0\Pi(y-x_k)\cdot a_0\Pi(y+x_k)$$
$$=f(y)\cdot(-1)^nf(-y)$$

だから，$f(y)\cdot f(-y)$ を計算して y^2 に y を代入すれば，$(-1)^na_0^2F(y)$ が得られる．

ゆえに $F(y)$ の符号にかまわないならば

$$a_0^2A_1=-a_1^2+2a_0a_2,$$
$$a_0^2A_2=a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4,$$
$$a_0^2A_3=-a_3^2+2a_2a_4-2a_1a_5+2a_0a_6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_0^2A_n=(-1)^na_n^2.$$

〔**問題 3**〕 三次方程式 $f(x)\equiv x^3+px^2+qx+r=0$ において一つの根が他の二つの根の相加平均に等しいとき，係数 p, q, r の間にいかなる関係があるか．

〔解〕 根を α, β, γ とすれば

$$S=(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)=0$$

が必要かつ十分な条件である．S は α，β，γ の対称式だから，それを係数 p，q，r の整式として表わすことができる．

その計算を実行すれば，

$$\begin{aligned}S&=(3\alpha+p)(3\beta+p)(3\gamma+p)\\&=-27\left(-\frac{p}{3}-\alpha\right)\left(-\frac{p}{3}-\beta\right)\left(-\frac{p}{3}-\gamma\right)\\&=-27f\left(-\frac{p}{3}\right)\\&=p^3-3p^3+9pq-27r\\&=-2p^3+9pq-27r=0.\end{aligned}$$

これが求める条件である．

第6章　三次および四次方程式

§ 33.　三次方程式の解法，Cardano の公式

1.　三次方程式

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

において

$$x=y-\frac{a_1}{3}$$

とおいて，未知数の一次変形を行なえば，y に関する方程式においては二次の項が消滅して次のような形になる：

$$y^3+ay+b=0.$$

ここで

$$a=f'\left(-\frac{a_1}{3}\right)=\frac{-1}{3}(a_1^2-3a_2),$$

$$b=f\left(-\frac{a_1}{3}\right)=\frac{1}{27}(2a_1^3-9a_1a_2+27a_3).$$

よって初めから方程式を簡約された形に取って

$$x^3+ax+b=0 \tag{1}$$

を解くことにする．

$$x=u+v \tag{2}$$

とおいて，（1）に代入すれば

$$u^3+v^3+(3uv+a)(u+v)+b=0. \tag{1*}$$

よって

$$u^3+v^3+b=0, \qquad 3uv+a=0$$

から u, v を定めて，その値を（2）に代入すれば，x は（1）を満足させる．上の条件は

$$\left.\begin{aligned} u^3+v^3&=-b \\ uv&=-\frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

で，これから u^3，v^3 を根とする二次方程式を得る．すなわち

$$t^2+bt-\frac{a^3}{27}=0 \tag{4}$$

である．これを三次方程式（1）の**分解方程式**という．

（4）から

$$u^3=\frac{-b}{2}+\sqrt{R},\qquad v^3=\frac{-b}{2}-\sqrt{R}.$$

ただし

$$R=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}. \tag{5}$$

よって

$$u=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}+\sqrt{R}},\qquad v=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}-\sqrt{R}}. \tag{6}$$

（2）に代入して

$$x=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{\frac{-b}{2}-\sqrt{R}}.$$

u，v は三乗根を開いて求めるのであるから，その値は各々三つあるが，（3）によって u v の積は一定であるから，u，v のうち一つが定まれば，他の一つは自ら定まる．すなわち

$$v=-\frac{a}{3u}.$$

いま u，v はこの関係を満足する立方根（6）の一組の値であるとすれば，ω を 1 の虚数立方根とするとき，u の他の二つの値は $\omega u, \omega^2 u$ で，それに対応する v の値は $\omega^2 v$，ωv である．よって（2）から三つの根を得る．すなわち

$$\left.\begin{aligned} x_1&=u+v\\ x_2&=\omega u+\omega^2 v\\ x_3&=\omega^2 u+\omega v \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

これが **Cardano の公式**とよばれるものである．

公式（7）において，$1,\omega^2,\omega$ および $1,\omega,\omega^2$ を順次に掛けて加え

$$3u=x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3,\qquad 3v=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$$

を得る．上の解法ははなはだ技術的で，不自然であるが，u, v と根 x_1, x_2, x_3 との間のこの関係に着眼すれば，おのずから次に掲げる Lagrange の合理的解法に到達することができる．

2. 三次方程式を一般の形

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \qquad (8)$$

に取って，その根を x_1, x_2, x_3 とする．ω を 1 の虚数立方根として

$$u=a_0(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3), \qquad v=a_0(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)$$

とおく．u において三つの根に置換を行なうときは，六つの相異なる式を得る．すなわち (123)，(132) によって u は ω^2u，ωu になり，また (23)，(13)，(12) によって $v, \omega^2v, \omega v$ になる．ゆえに u^3 からは x_1, x_2, x_3 の置換によってただ二つの相異なる式を生ずる．それらはすなわち u^3, v^3 である．したがって u^3+v^3 と u^3v^3 とは三つの根の対称式であるが，特に uv それ自身がすでに対称式である．よって

$$u^3+v^3=a_0^3(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3+a_0^3(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)^3=A,$$
$$uv=a_0^2(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)=B$$

とおけば，A, B は方程式（8）の係数の有理式として計算することのできるものである．

A は $(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)+(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)$ すなわち $2x_1-x_2-x_3$ という因数をもつから，対称の理由によって

$$\begin{aligned}A&=a_0^3(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)\\&=(3a_0x_1+a_1)(3a_0x_2+a_1)(3a_0x_3+a_1)\\&=-27a_0^2f\left(-\frac{a_1}{3a_0}\right)=9a_0a_1a_2-2a_1^3-27a_0^2a_3.\end{aligned}$$

また $$B=a_0^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)=a_1^2-3a_0a_2.$$

さて u^3, v^3 は二次方程式

$$t^2-At+B^3=0$$

の根である．u^3-v^3 は x_1, x_2, x_3 の交代式で次数は 3，$x_1^2x_2$ の係数は $3(\omega-\omega^2)a_0^3=3\sqrt{-3}\,a_0^3$ であるから，

$$u^3-v^3=3\sqrt{-3}\,a_0^3(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3).$$

ゆえに三次方程式（8）の判別式を D とすれば,

$$u^3-v^3=a_0\sqrt{-27D}.$$

したがって

$$u^3=\frac{A+a_0\sqrt{-27D}}{2},\qquad u=\sqrt[3]{\frac{A+a_0\sqrt{-27D}}{2}},\qquad v=\frac{B}{u}.$$

u, v の値を得た上は

$$x_1+\ x_2+\ x_3=\frac{-a_1}{a_0},$$

$$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\frac{u}{a_0},$$

$$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\frac{v}{a_0}.$$

これらに $1,1,1$；または $1,\omega^2,\omega$；または $1,\omega,\omega^2$ を掛けて加え

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{3a_0}(-a_1+\ \ u+\ \ v),\\ x_2&=\frac{1}{3a_0}(-a_1+\omega^2 u+\omega v),\\ x_3&=\frac{1}{3a_0}(-a_1+\omega u+\omega^2 v).\end{aligned}\right\}$$

上の解法で平方根 $\sqrt{-27D}$ の値が二つあり，また立方根が三つの値を与えるから，u の値は六通りあるが，どのように u の値を選んでも三つの根の値は全体としては同一で，ただその順序が六通りに変わるだけである．根 x_1, x_2, x_3 の番号になんら特定の意味はないから，これは当然である．

3. 上の Lagrange の解法は，かなり自然的の方法というべきであるが，ただ $x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ のようなものを捕えたのが天来の思いつきであるかに見える．いま更に一歩を進めて，このような分解式 $x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ の由来を説明する．分解式というのは，ある方程式を解く手段として用いられる原方程式の根の有理式をいうのである．

いま三次方程式

$$f(x)=0$$

の根 x_1,x_2,x_3 の有理式を $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ とし，φ から三つの根の置換によって生ずる六つの有理式を $\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_5$ とし，これらが相異なる式であるように

φ を選んだものとする（上の u はその一例である）．しからば定理 5.6 によってこれらの六つの有理式は x_1,x_2,x_3 の対称式を係数とする六次方程式の根である．その方程式を

$$X^6+A_1X^5+\cdots+A_6=0 \qquad (9)$$

とすれば，係数 $A_1,A_2\cdots,A_6$ は方程式（8）の係数によって有理的に表わし得る既知数である．さて定理 5.7 によって，x_1,x_2,x_3 の任意の有理式，したがって特に x_1,x_2,x_3 それ自身が φ に関する有理式として計算される（φ の代わりに $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_5$ のうちのどれを用いることにしても同様）．すなわち x_1, x_2, x_3 が知れたならば，$\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_5$ はもちろん有理的に求められるが，逆に $\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_5$ のうちの一つだけが知れたならば，x_1,x_2,x_3 が有理的に計算されるから，方程式（8）の三つの根を求めるのも，方程式（9）の一つの根を求めるのもつまり同一の問題と見ることができる．このように三次方程式（8）の解法を六次方程式（9）の解法に帰着させることは，方程式の次数に拘泥すれば，かえって問題を複雑ならしめるかに見えるけれども，実は方程式（9）は特殊な六次方程式で，すなわちその根の中の一つが知れたときに，他の根がすべて有理的に求められるのであるから，単に次数の高低のみによって方程式の難易を判定することはできないのである．

方程式（9）の根の中の一つによって，他のものが有理的に表わされることに基づいて，三次方程式の解法の中に現われる著明な一つの事実が最も明瞭に説明される．前節において用いた分解式では u v の積が x_1,x_2,x_3 の対称式に等しく，したがって u によって v が有理的に表わされたのであるが，それが偶然の事情であるかに見えたのである．しかるに上のように考えると，v が u の有理式として表わされることは当然であって，ただそれが $uv=B$ のようになることが，u の特別なる選定の結果として生じたのにすぎないのである．

さて六次方程式（9）であるが，もし φ を適当に選ぶことによって，（9）が

$$X^6+A_3X^3+A_6=0 \qquad (10)$$

のような形になるならば，それは X^3 に関する二次方程式であるから，それを解いて φ^3 を求め，次に立方根を開いて φ を求めることができる．φ が（10）

の根であるときには，$\omega\varphi$, $\omega^2\varphi$ がやはり (10) を満足するから，φ は x_1, x_2, x_3 の置換によって $\omega\varphi$, $\omega^2\varphi$ にならなければならない．またそのような置換は $(1,2,3)$, $(1,3,2)$ でなければならない ($\varphi|(12))=C\cdot\varphi$ ならば，$C^2=1$ であるから)．このような φ をなるべく簡単に求めるために，φ を x_1, x_2, x_3 の一次式として

$$\varphi=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

とおいて見れば，条件は

$$c_1x_2+c_2x_3+c_3x_1=\omega(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3),$$

すなわち

$$c_3=\omega c_1, c_1=\omega c_2, c_2=\omega c_3,$$

あるいは

$$c_1 : c_2 : c_3=1 : \omega^2 : \omega.$$

よって $c_1=1$ とすれば

$$\varphi=x_1+\omega^2x_2+\omega x_3$$

で，すなわち Lagrange の解法の根拠が明白になったのである．

§ 34.　実三次方程式，三角函数による解法

1.　本節では，三次方程式の係数を実数とする．この場合には三つの実根または一つの実根と二つの共役なる虚根とがある．

これらの二つの場合は，判別式 D の符号によって区別される．根が三つとも実数ならば，$D=\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}^2\geqq 0$．また x_1 は実数，x_2, x_3 は共役複素数ならば，$(x_1-x_2)(x_1-x_3)$ は共役な複素数の積であるから正である．また x_2-x_3 は純虚数，したがって $(x_2-x_3)^2$ は負数であるから，$D<0$.

さて方程式を簡単な形

$$x^3+ax+b=0$$

に変形したものとして見ると，§ 33, (5) の通り

$$R=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=-\frac{D}{4\cdot 27}.$$

ゆえに $D<0$ ならば，$R>0$，したがって

$$u^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{R},\qquad v^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{R}$$

は実数である．よって $-\dfrac{b}{2}+\sqrt{R}$ の立方根の実数値を u とすれば

$$uv=-\frac{a}{3}$$

から，v も実数で，

$$x_1=u+v$$

は実根，

$$x_2=\omega u+\omega^2 v,\qquad x_3=\omega^2 u+\omega v$$

は互いに共役な虚根である．

次に $D=0$ ならば，$R=0$．したがって

$$u=v=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}},$$

$$x_1=2\sqrt[3]{\frac{-b}{2}},$$

$$x_2=(\omega+\omega^2)u=-\sqrt[3]{\frac{-b}{2}},$$

$$x_3=(\omega^2+\omega)u=-\sqrt[3]{\frac{-b}{2}}.$$

しかるに $D>0$ のときには，$R<0$，したがって u^3, v^3 は共役な虚数で，u，v も，$\omega u, \omega^2 v$ も，$\omega^2 u, \omega v$ も互いに共役になって，三つの実根が Cardano の公式で，共役複素数の和として表わされている．これは Cardano の公式の欠点と見なされて，三つの実根を実数の開法によって得ようということが問題になった．この問題は久しく数学者の頭を脳ましたものであるが，解決がつかないで，不還元の場合（Casus irreducibilis）とよばれていたのであった．現今では，この問題は不可能であることが知れている．すなわち冪根で方程式の三つの実根を表わすためには，複素数の立方根を避けることは不可能であるというのである．これは立方根の性質からの当然の帰結である（§ 41 参照）．

2. しかるに開立の代わりに，三角函数の三分法を用いるならば，問題は容

易に解決されるのである．

$D>0$ したがって $R=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}<0$ のときには，$a<0$ でなければならない．また

$$u^3=\frac{-b}{2}+\sqrt{R}=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{-D}{4\cdot 27}}$$
$$=-\frac{b}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{D}{27}}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおけば，

$$u=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$x_1=u+v=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} x_2&=\omega u+\omega^2 v=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}=-2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta-\pi}{3}\\ x_3&=\omega^2 u+\omega v=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}=-2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+\pi}{3}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここで

$$uv=(\sqrt[3]{r})^2$$

であるから，$uv=-\frac{a}{3}$ から $\left(a<0 \quad だから，-\frac{a}{3}>0\right)$

$$(\sqrt[3]{r})^2=\frac{-a}{3},$$

したがって

$$\sqrt[3]{r}=\sqrt{\frac{-a}{3}}. \qquad (2)$$

また

$$\cos\theta=\frac{-b}{2r}, \qquad (3)$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{D}{27}}$$

で，平方根 $\sqrt{\frac{D}{27}}$ の正の値をとれば，$\sin\theta>0$．よって $\pi>\theta\geqq 0$ とすれば，θ は（3）から求められ，したがって（1）によって三つの根が得られるのであ

る．$\sqrt[3]{r}$ は（2）から開平によって求められるから，この計算では開立は不要である．すなわち立方根を開くという計算の代わりに $\cos\theta$ から $\cos\frac{\theta}{3}$，$\cos\frac{\theta+2\pi}{3}$，$\cos\frac{\theta-2\pi}{3}$ を求めるという問題，すなわち三角函数 cos の三分法に三次方程式の解法が還元されるのである．

立方根を求めることは $x^3-A=0$ のような三次方程式を解くことで（それは虚数なしにはできない），cos の三分法は $\cos\theta$ を既知数，$x=\cos\frac{\theta}{3}$ などを未知数とすれば，

$$4x^3-3x=\cos\theta \qquad (4)$$

なる三次方程式を解くことである．すなわち $D>0$ の場合の実三次方程式の解法が（開平によって $\cos\theta$ を求めた後），三次方程式（4）の解法に還元されるのである．

このような結論に到着した上で，三つの実根をもつ三次方程式

$$x^3+ax+b=0 \qquad (5)$$

の解法を組立てるのならば，次のような近道を見出だすことは容易である．すなわち（5）において $x=\lambda x'$ とおいて，未知数を変換し，λ を適当に選んで，（5）を（4）の形

$$4x'^3-3x'-c=0 \qquad (6)$$

に変形することを試みる．この変換によって（5）は

$$\lambda^3x'^3+\lambda ax'+b=0$$

になるから，λ は

$$\frac{\lambda^3}{4}=\frac{-\lambda a}{3}=\frac{-b}{c}$$

から求められるべきである．よって

$$\lambda^2=\frac{-4a}{3},\quad \lambda=2\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

したがって

$$C=\frac{-4b}{\lambda^3}=\frac{-b}{2}\Big/\sqrt{\frac{-a^3}{27}}.$$

（5）が実根のみをもつ場合には $\left|\frac{b^2}{4}\right|\leqq\left|\frac{a^3}{27}\right|$ だから，$|c|\leqq 1$．ゆえに $c=\cos\theta$

なる θ が求められる．しからば（6）から

$$x'=\cos\frac{\theta}{3},\qquad \cos\frac{\theta+2\pi}{3},\qquad \cos\frac{\theta+4\pi}{3}$$

すなわち

$$x=2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\quad -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta-\pi}{3},\quad -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\theta+\pi}{3}.$$

〔例〕　$z^3+z^2-4z+1=0.$

$z=-x-\dfrac{1}{3}$ とおけば

$$x^3-\frac{13}{3}x-\frac{65}{27}=0.$$

$$a=-\frac{13}{3},\quad b=-\frac{65}{27},\quad D>0.$$

$$\lambda=\frac{2\sqrt{13}}{3},\quad c=\cos\theta=\frac{65}{2(\sqrt{13})^3}.$$

$$\log\cos\theta=9.8409683-10,\quad \theta=46°6'.127$$

$$\frac{\pi-\theta}{3}=44°37'.958,\quad \frac{\pi+\theta}{3}=75°22'.042.$$

$$x_1=2.317759,\qquad x_2=-1.710536,\qquad x_3=-0.607223,$$

$$z_1=-2.651092,\qquad z_2=1.377203,\qquad z_3=0.273890.$$

§ 35.　四次方程式（解法の一般論）

1.　四次方程式の解法は Ferrari（1522—1565）の発見とされている．

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

においても

$$y=x+\frac{a_1}{4}$$

を未知数とすれば，三次の項は消失する．よって初めから方程式を簡単な形

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

に取る．すなわち

$$x^4=-px^2-qx-r.$$

両辺に $yx^2+\dfrac{y^2}{4}$ を加えると，左辺は平方の形になって

$$\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2=(y-p)x^2-qx+\left(\frac{y^2}{4}-r\right).\qquad(1)$$

右辺がxに関する完全な平方になるには

$$q^2-4(y-p)\left(\frac{y^2}{4}-r\right)=0$$

であればよい．これはyに関する三次方程式である．すなわち

$$y^3-py^2-4ry+(4pr-q^2)=0.$$

この三次方程式を解いて，その一つの根を（1）に代入すれば

$$\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2=(y-p)\left(x-\frac{q}{2(y-p)}\right)^2.$$

よって

$$x^2+\frac{y}{2}=\sqrt{y-p}\left(x-\frac{q}{2(y-p)}\right). \tag{3}$$

または

$$x^2+\frac{y}{2}=-\sqrt{y-p}\left(x-\frac{q}{2(y-p)}\right). \tag{3'}$$

これらの二次方程式を解いてxの四つの値を得るのである．

方程式（2）を原四次方程式の**三次分解方程式**という．

（3），（3′）の根をそれぞれ $x_1, x_2; x_3, x_4$ とすれば，

$$x_1+x_2=\sqrt{y-p}. \qquad x_1x_2=\frac{y}{2}+\frac{q}{2\sqrt{y-p}},$$

$$x_3+x_4=-\sqrt{y-p}. \qquad x_3x_4=\frac{y}{2}-\frac{q}{2\sqrt{y-p}}.$$

ゆえに

$$x_1x_2+x_3x_4=y.$$

これが分解方程式（2）の根と四次方程式の根との関係である．

また $$x_1+x_2-x_3-x_4=2\sqrt{y-p}.$$

2. 四次方程式

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{4}$$

はまた§33で Cardano の公式を得たのと同様の方法で解かれることを Euler が示した．すなわち

$$x=u+v+w \tag{5}$$

とおけば，

$$x^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw).$$

$$x^4=(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+uw+vw)$$
$$+4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8uvw(u+v+w),$$

これらを（4）に代入すれば

$$(u^2+v^2+w^2)^2+2\{2(u^2+v^2+w^2)+p\}(uv+uw+vw)+4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)$$
$$+p(u^2+v^2+w^2)+(8\,uvw+q)(u+v+w)+r=0.)$$

ゆえに（4）は

$$2(u^2+v^2+w^2)+p=0, \qquad 8\,uvw+q=0,$$
$$(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+p(u^2+v^2+w^2)+r=0$$

であるときに満足される．または第一の等式を用いて，第三の等式を簡単にして

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2+w^2&=-\frac{p}{2},\\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2&=\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4},\\ uvw&=-\frac{q}{8}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

すなわち u^2, v^2, w^2 が三次方程式

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)t-\left(\frac{q}{8}\right)^2=0,$$

すなわち

$$(4\,t)^3+2\,p(4\,t)^2+(p^2-4\,r)(4\,t)-q^2=0 \qquad (7)$$

の根であればよい．この三次方程式の三つの根を t_1, t_2, t_3 とすれば，

$$u=\pm\sqrt{t_1}, \qquad v=\pm\sqrt{t_2}, \qquad w=\pm\sqrt{t_3}.$$

ただし，（6）の第三の等式によって $uvw=-\dfrac{q}{8}$ としなければならないから，平方根の符号は，三つのうち二つを任意にとれば，他の一つは自然に定まるのである．

その一組を $\sqrt{t_1}$，$\sqrt{t_2}$，$\sqrt{t_3}$ とすれば，その他は $\sqrt{t_1}$，$-\sqrt{t_2}$，$-\sqrt{t_3}$; $-\sqrt{t_1}$，$\sqrt{t_2}$，$-\sqrt{t_3}$; $-\sqrt{t_1}$，$-\sqrt{t_2}$，$\sqrt{t_3}$ でなければならない．それらの値を（5）に入れて

$$x_1=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}, \qquad x_2=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3},$$
$$x_3=-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}, \qquad x_4=-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}.$$

これが四次方程式（4）の四つの根である.

これらの根の値から

$$4\sqrt{t_1}=x_1+x_2-x_3-x_4, \qquad 4\sqrt{t_2}=x_1-x_2+x_3-x_4,$$
$$4\sqrt{t_3}=x_1-x_2-x_3+x_4.$$

したがって

$$16u^2=(x_1+x_2-x_3-x_4)^2, \qquad 16v^2=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2,$$
$$16w^2=(x_1-x_2-x_3+x_4)^2$$

を得る. これが分解方程式(7)の三つの根と原四次方程式の根との関係である.

3. 上の二つの解法は, いずれも特殊の技巧によるのであるが, 第一の解法は二次方程式の解法に用いられる方法を二重に応用したもので, 自然的の思いつきである. また第二の解法は, 三次方程式に適用された方法の模擬である. どちらの方法でも, 四次方程式の解法が三次の分解方程式の解法に還元されることが, 著しい現象であるが, 上文に説明した原方程式の根と分解方程式の根との関係によれば, 一層合理的の解法を案出することができる. そこへ着眼したのは, やはり Lagrange で, 次に説明するのが Lagrange の解法である.

四つの物 1,2,3,4 を二対に分ける仕方は三通りある. すなわち

$$12|34, \qquad 13|24, \qquad 14|23.$$

よって四つの根 x_1, x_2, x_3, x_4 の有理式で, 根の置換によってただ三つの相異なる形を生ずるものを作ることができる. なかんずく, 最も手近なのは

$$y_1=x_1x_2+x_3x_4, \qquad y_2=x_1x_3+x_2x_4, \qquad y_3=x_1x_4+x_2x_3.$$

で, y_1, y_2, y_3 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 に関しても対称であるから, 四次方程式の係数から有理的にその値を求めることができる. したがって y_1, y_2, y_3 は三次の分解方程式の根である.

x_1, x_2, x_3, x_4 の一次式でこのような性質をもつものはないが,

$$u_1=(x_1+x_2)-(x_3+x_4), \qquad u_2=(x_1+x_3)-(x_2+x_4),$$
$$u_3=(x_1+x_4)-(x_2+x_3)$$

とすれば，これらからは根の置換によって，$-u_1, -u_2, -u_3$ をも生ずるが，

$$u_1{}^2,\ u_2{}^2,\ u_3{}^2$$

は上の y_1, y_2, y_3 と同様の性質をもつ．すなわち $u_1{}^2, u_2{}^2, u_3{}^2$ の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式であって，特に $u_1u_2u_3$ はそれ自身がすでに x に関する対称式である．そこで

$$u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2=A, \qquad u_1{}^2u_2{}^2+u_1{}^2u_3{}^2+u_2{}^2u_3{}^2=B,$$
$$u_1u_2u_3=C \tag{8}$$

とおけば，$u_1{}^2, u_2{}^2, u_3{}^2$ は三次の分解方程式

$$t^3-At^2+Bt-C^2=0 \tag{9}$$

の根である．この方程式の三つの根を t_1, t_2, t_3 とすれば，

$$u_1=\pm\sqrt{t_1}, \qquad u_2=\pm\sqrt{t_2}, \qquad u_3=\pm\sqrt{t_3}$$

で，平方根の値は（8）に適合するように定めるべきである．よって上の第二の解法と同様に

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0}, \qquad x_1+x_2-x_3-x_4=\sqrt{t_1},$$
$$x_1-x_2+x_3-x_4=\sqrt{t_2}, \qquad x_1-x_2-x_3+x_4=\sqrt{t_3}$$

から

$$4x_1=-\frac{a_1}{a_0}+\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3},$$
$$4x_2=-\frac{a_1}{a_0}+\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3},$$
$$4x_3=-\frac{a_1}{a_0}-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3},$$
$$4x_4=-\frac{a_1}{a_0}-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}$$

を得る．この解法では原四次方程式を簡単な形に取ることを要しない．

§ 36.　四次方程式（三次分解方程式の計算）

1.　前節の説明によって四次方程式の解法において三次分解方程式が出て来る理由が明らかになった．さて三次分解方程式の係数を四次方程式の根の対称

式として計算するに当って，本節では，四次方程式を

$$f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \tag{1}$$

の形におく．y_1, y_2, y_3 および u_1, u_2, u_3 の意味は前の通り．

さて

$$\begin{aligned}
u_1^2&=(x_1+x_2-x_3-x_4)^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(y_2+y_3)\\
&=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(y_1+y_2+y_3)+4y_1\\
&=\frac{16a_1^2}{a_0^2}-\frac{24a_2}{a_0}+4y_1
\end{aligned}$$

なる関係があるから，u^2 または y に関する分解方程式の中で，一方が計算されたときに，それから他の一つを導くことができる．しかし本節では三次分解方程式を簡単な形に出すために

$$(y_1+y_2+y_3)-3y_1=\frac{6a_2}{a_0}-3y_1$$

などを根とする方程式を求める．そうすれば三つの根の和が 0 になるから，第二項の欠けた三次分解方程式を得るのである．

いま計算の便宜上

$$e_1=\frac{1}{4}(2a_2-a_0y_1)=\frac{a_0}{12}(y_2+y_3-2y_1),$$

$$e_2=\frac{1}{4}(2a_2-a_0y_2)=\frac{a_0}{12}(y_3+y_1-2y_2),$$

$$e_3=\frac{1}{4}(2a_2-a_0y_3)=\frac{a_0}{12}(y_1+y_2-2y_3).$$

とする．

しからば

$$e_1=\frac{a_0}{12}\{(y_3-y_1)-(y_1-y_2)\}\ \text{など},$$

で，また

$$y_2-y_3=x_1x_3+x_2x_4-x_1x_4-x_2x_3=(x_1-x_2)(x_3-x_4).$$

x_1, x_2, x_3, x_4 に置換 (2 3 4) を行なうとき，y_1, y_2, y_3 の間に置換 (1 2 3) が生ずるから，いま

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_0(x_1-x_2)(x_3-x_4),\\ v_2&=a_0(x_1-x_3)(x_4-x_2),\\ v_3&=a_0(x_1-x_4)(x_2-x_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

とおけば，

$$\left.\begin{aligned} e_1&=\frac{1}{12}(v_2-v_3),\\ e_2&=\frac{1}{12}(v_3-v_1),\\ e_3&=\frac{1}{12}(v_1-v_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

（2）から

$$v_1+v_2+v_3=0. \qquad (4)$$

したがって

$$v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2=-2(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3). \qquad (5)$$

左辺は明らかに x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である．それを

$$v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2=24\,g_2 \qquad (6)$$

とおく．$(v_1v_2v_3)^2$ は（2）から見える通り，四次方程式の判別式である．よって

$$v_1v_2v_3=16\sqrt{\varDelta} \qquad (7)$$

とする．すなわち（1）の判別式を $256\varDelta$ とおくのであるが，256 は後に至って計算の結果，判別式から出て来る数字係数で，このような数字係数が出るために判別式が簡単になるのは，（1）のように四次方程式の係数を二項係数の掛かった形にしておくからである．（4），（5），（6），（7）から v_1, v_2, v_3 を根とする三次方程式を得る．すなわち

$$v^3-12g_2v-16\sqrt{\varDelta}=0. \qquad (8)$$

$v_1=a_0(x_1-x_2)(x_3-x_4)$ からは，x_1, x_2, x_3, x_4 の置換によって $\pm v_1$，$\pm v_2$，$\pm v_3$ の六つの異なる式が生ずるから，（8）の係数は四次方程式の係数によって有理的に表わされないで，$\sqrt{\varDelta}$ のような無理式が現われるのである．しかるに v_1, v_2, v_3 の交代式は，（3）から見えるように，かえって x_1, x_2, x_3, x_4 の

対称式である．よって

$$(v_1-v_2)(v_3-v_1)(v_2-v_3)=432g_3 \tag{9}$$

とおいて，三次方程式（8）の判別式を計算すれば（§ 33），

$$432^2g_3{}^2=-4(-12g_2)^3-27(16\sqrt{\varDelta})^2,$$

すなわち

$$\varDelta=g_2{}^3-27g_3{}^2. \tag{10}$$

これによって四次方程式の判別式 $\varDelta$ の計算は，対称式 g_2, g_3 の計算に帰する．

さて，e_1, e_2, e_3 を根とする三次分解方程式であるが，

$$e_1+e_2+e_3=0$$

であるから，

$$e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2=-2(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3).$$

しかるに（3）によって

$$e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2=\frac{1}{144}\{(v_2-v_3)^2+(v_3-v_1)^2+(v_1-v_2)^2\}$$

$$=\frac{1}{144}\left\{2\sum v_1{}^2-2\sum v_1v_2\right\}$$

$$=\frac{1}{144}\times 3\sum v_1{}^2=\frac{1}{48}\sum v_1{}^2=\frac{g_2}{2}.$$

ゆえに

$$e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3=-\frac{g_2}{4}.$$

また（3），（9）から

$$e_1e_2e_3=\frac{1}{12^3}432g_3=\frac{g_3}{4}.$$

ゆえに求めるところの三次方程式は

$$4e^3-g_2e-g_3=0 \tag{11}$$

である．

2. Ferrari の解法（§ 35.1）によれば三次分解方程式の根を用いて，四次方程式が二つの二次方程式に分割される．いま e_1 を用いるならば，この解法

は次のようになる.

$$f(x)=a_0(x^2+2px+q)(x^2+2p'x+q')$$

とおいて，各二次因数の根を x_1, x_2 および x_3, x_4 とすれば，係数の比較から

$$a_0(p+p')=2a_1, \tag{12}$$

$$a_0(4pp'+q+q')=6a_2, \tag{13}$$

$$a_0(pq'+p'q)=2a_3, \tag{14}$$

$$a_0qq'=a_4, \tag{15}$$

また

$$q+q'=x_1x_2+x_3x_4$$

から，

$$a_0(q+q')=2(a_2-2e_1). \tag{16}$$

ゆえに（13）から

$$a_0pp'=a_2+e_1. \tag{17}$$

（12）と（17）とによって，$p+p'$ と pp' とが知られるから，二次方程式の解法によって p, p' を得る．したがって（14）と（16）とから連立一次方程式の解法によって q, q' を得る.

このようにして四次式 $f(x)$ が二次因子に分解されるから，その各因数から二次方程式の解法によって四つの根が求められる．しかしながら，もしも三次分解方程式の他の根 e_2 をも用いるならば，同様の方法で

$$f(x)=a_0(x^2+2p_1x+q_1)(x^2+2p_1'x+q_1')$$

のような分解を行なうことができる．これらの各因数の根を x_1, x_3 および x_2, x_4 とすれば，x_1 は $x^2+2px+q=0$ と $x^2+2p_1x+q_1=0$ との共通根として，最大公約数の計算によって有利的に求められる．同様に，二次因数の他の組合わせから x_2, x_3, x_4 が得られる.

上の四次式の分解を利用すれば，g_2, g_3 の式が容易に見出だされる．g_2, g_3 を四つの根の対称式として表わす式は，（6）と（9）とに示してあるが，それらを四次式の係数で表わす計算は，まだ実行しなかったのである.

さて（12）～（17）から次の恒等式が出る.

$$a_0(X+pY+q)(X+p'Y+q')=a_0X^2+2a_1XY+(a_2+e_1)Y^2$$
$$+2(a_2-2e_1)X+2a_3Y+a_4.$$

すなわち右辺の二元二次式が一次因数に分解されるから，よく知られた定理（§ 62 参照）によって，その係数から作られる次の行列式が 0 に等しい：

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2-2e_1 \\ a_1 & a_2+e_1 & a_3 \\ a_2-2e_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0.$$

e_1 の代わりに e_2 または e_3 を取っても同様であるから，この行列式を展開すれば，e_1 に関する三次式が得られる．それがすなわち（11）の左辺と同一であるから，一次の項と定数項とから g_2, g_3 の式が得られる．すなわち次の通りである．

$$g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$

$$g_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_0a_3^2-a_1^2a_4.$$

§ 37.　四次方程式（根の非調和比）

1.　四次方程式の四つの根の有理式の中で，最も著しいものは非調和比であろう．根を $x_1x_2|x_3x_4$ の二対に分けて非調和比を作れば

$$k=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4} \tag{1}$$

を得る．四つの根の 24 個の順列に応じて，k からいくつの異なる式が生ずるかを見よう．まずこの比の組立てから明らかであるように，各対の二つの根だけを互換すれば，k はその逆数に変わるから，二対ともに互換すれば，k は変わらない．すなわち上の比 k を [12.34] としるせば

$$[12.34]=[21.43].$$

また各対の 2 根の順序を変えないで，二対の位置を前後互換しても，k は変わらない．すなわち

$$[12.34]=[34.12].$$

しかるに，上の理由によって

$$[34.12]=[43.21]$$

であるから，

$$[12.34]=[21.43]=[34.12]=[43.21]. \tag{2}$$

すなわち k は四つの置換 1，(12)(34)，(13)(24)，(14)(23) では変わらない．ゆえに四つの根の 24 個の順列に対応して，k から高々6個の異なる式が生ずる．

さて v_1, v_2, v_3 の意味は前節の通りとすれば，

$$k=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}=-\frac{v_2}{v_3} \tag{3}$$

よって 24 個の順列に対応する非調和比の値は次のようになる．

$$[12.34]=[21.43]=[34.12]=[43.21]=-\frac{v_2}{v_3}=k,$$

$$[12.43]=[21.34]=[34.21]=[43.12]=-\frac{v_3}{v_2}=\frac{1}{k},$$

$$[13.42]=[24.31]=[31.24]=[42.13]=-\frac{v_3}{v_1}=\frac{1}{1-k},$$

$$[13.24]=[24.13]=[31.42]=[42.31]=-\frac{v_1}{v_3}=1-k,$$

$$[14.23]=[23.14]=[32.41]=[41.32]=-\frac{v_1}{v_2}=\frac{k-1}{k},$$

$$[14.32]=[23.41]=[32.14]=[41.23]=-\frac{v_2}{v_1}=\frac{k}{k-1}.$$

$$v_1+v_2+v_3=0$$

であるから，これらの六つの比は上の表の右端にしるした通り

$$k,\quad \frac{1}{k},\quad 1-k,\quad \frac{1}{1-k},\quad \frac{k-1}{k},\quad \frac{k}{k-1} \tag{4}$$

に等しいのである．

すなわち非調和比は根の置換によって六つの相異なる値をもつものである．したがって，これらの六つの値は六次の分解方程式の根である．

この六次分解方程式の著しい性質は，六つの根がその中の一つの一次式として表わされることである．前節で行なった計算の結果を応用すれば，この六次方程式は容易に求められる．

まず上の表から

$$k+\frac{1}{k}-1=-\frac{v_2}{v_3}-\frac{v_3}{v_2}-1=-\frac{{v_2}^2+v_2v_3+{v_3}^2}{v_2v_3}=-\frac{1}{2}\frac{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}{v_2v_3}=-\frac{12g_2}{v_2v_3}$$

$k=-\frac{v_2}{v_3}$ を掛けて

$$k^2-k+1=\frac{12g_2}{{v_3}^2}.$$

また

$$k(1-k)=\frac{v_1v_2}{{v_3}^2}=\frac{v_1v_2v_3}{{v_3}^3}=\frac{16\sqrt{\varDelta}}{{v_3}^3}.$$

ゆえに

$$\frac{(k^2-k+1)^3}{k^2(1-k)^2}=\frac{27{g_2}^3}{4\varDelta}. \qquad (5)$$

k を未知数と見れば，これがすなわち求めるところの六次分解方程式である．

念のためにその理由を説明する．（5）の両辺を x_1, x_2, x_3, x_4 で表わしてしまえば，それはすなわち x_1, x_2, x_3, x_4 に関する恒等式である．ゆえに x_1, x_2, x_3, x_4 にいかなる置換を行なっても，その恒等式は成り立つ．しかるに，これらの置換によって k は上の（4）の六つの値を取るが，右辺は対称式であるから変わらない．ゆえに k の代わりに非調和比の他の値を入れても（5）は成り立つのである．

前節（10）$\varDelta={g_2}^3-27{g_3}^2$ を参考して，（5）を次のように書く．

$$\frac{4(k^2-k+1)^3}{{g_2}^3}=\frac{27k^2(1-k)^2}{\varDelta}=\frac{4(k^2-k+1)^3-27k^2(1-k)^2}{27{g_3}^2}. \qquad (6)$$

さて

$$4(k^2-k+1)^3-27k^2(1-k)^2=[(k+1)(k-2)(2k-1)]^2. \qquad (7)$$

そこで

$$J=\frac{{g_2}^3}{\varDelta}$$

とおけば（6）を次のような立派な形に書くことができる．

$$\frac{4(k^2-k+1)^3}{J}=\frac{(k+1)^2(k-2)^2(2k-1)^2}{J-1}=\frac{27k^2(1-k)^2}{1}. \qquad (8)$$

非調和比 k は x_1, x_2, x_3, x_4 に同一の一次変形を行なうときに不変である．しかるに J は k の有理式に等しいから，四次方程式の未知数に一次変形を行なって，変形後の係数から J を作っても，それは不変である．すなわち J はいわゆる絶対不変式である．

g_2, g_3 は四次式の不変式である（§29，155頁，参照）．

前節では単に三次分解方程式の第二項を0にすることを目標として計算を行なって，その結果として g_2, g_3 なる二つの式が生じたのであるが，(6) を考察すれば，g_2, g_3 と四次方程式の根との間に著しい関係のあることが知られる．すなわち $g_2=0$ であるときは $k^2-k+1=0$，したがって根の非調和比が1の6乗根 $\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ に等しい．この場合には x_1, x_2, x_3, x_4 は等値非調和 (equianharmonic) であるという．また $g_3=0$ であるときは，k は -1 または2または $\dfrac{1}{2}$ に等しい．この場合には x_1, x_2, x_3, x_4 は調和 (harmonic) である．

$\Delta=0$ は等根の場合である．

§36 (6) によって $g_2=0$ ならば，$v_1^2+v_2^2+v_3^2=0$，したがって $v_2^2+v_2v_3+v_3^2=0$．ゆえに v_2/v_3 は1の虚立方根に等しく，したがって $k=-v_2/v_3$ は1の虚6乗根に等しい．実はそれを承知の上で，上の $k+\dfrac{1}{k}-1$ を g_2 と結びつけたのである．また $g_3=0$ ならば §36 (9) によって v_1, v_2, v_3 の中に相等しいものがある．もし $v_2=v_3$ とすれば $k=-1$，$v_3=v_1$ とすれば $k=2$，$v_1=v_2$ とすれば $k=\dfrac{1}{2}$ である．それゆえ (7) の因数分解ができたのである．

§38.　二元二次方程式

1.　二つの未知数 x, y に関する連立二次方程式

$$\left.\begin{aligned} F&=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \\ G&=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

は，一つの未知数を消去することによって，他の一つの未知数のみを含む四次方程式に帰するけれども，消去法を用いないで，幾何学的の考察法によって，直接に四次方程式との平行な解法が得られる．

λ を定数として二次式

$$F+\lambda G=(a+\lambda a')x^2+2(h+\lambda h')xy+(b+\lambda b')y^2$$
$$+2(g+\lambda g')x+2(f+\lambda f')y+(c+\lambda c') \qquad (2)$$

を作れば，これは

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a' & h+\lambda h' & g+\lambda g' \\ h+\lambda h' & b+\lambda b' & f+\lambda f' \\ g+\lambda g' & f+\lambda f' & c+\lambda c' \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

であるとき，二つの一次式の積に分解される（§ 62 参照）.

（3）は λ に関する三次方程式である．その根を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ として

$$\left.\begin{aligned} F+\lambda_1 G&=L_1\cdot L_2, \\ F+\lambda_2 G&=M_1\cdot M_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

という分解を行なって，一次式 L_1, L_2, M_1, M_2 を求めるならば，（1）の解は $F+\lambda_1 G=0$, $F+\lambda_2 G=0$ から得られるから，問題は次の 4 組の一次方程式を解くことに帰する.

$$\left.\begin{aligned} L_1&=0 \\ M_1&=0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} L_1&=0 \\ M_2&=0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} L_2&=0 \\ M_1&=0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} L_2&=0 \\ M_2&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

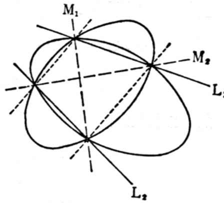
このようにして（1）の四つの根が得られる.

上の解法を Lagrange の四次方程式の解法（§ 35, 3）に比較するときは，その類似が著しい．まず（3）は三次分解方程式に該当する．その根を求めた上で（4）の分解を行なうのに二つの互いに独立な開平を要すること，あたかも §35 において u_1, u_2, u_3 を求めるのに同じである．この分解を行なってしまえば，あとは有理的計算のみで（5）を解いて解が得られるのである.

上の二元二次方程式の解法は解析幾何学において二つの二次曲線 $F=0$, $G=0$ の交点を求める方法である.

$F+\lambda G=0$ はこれらの交点を通る一般の二次曲線で，その中に二直線に分解されるものが三つ含まれる．すなわち λ が（3）の根である $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に等しいものである．ただし上の方法は交点が存在しない（虚点である）場合にも，もちろんあてはまるばかりでなく，初めから F, G の係数を実数に限ったので

はない．



上記は一般的の場合で，方程式（3）が複根をもたないと仮定したのである．（3）が複根をもつのは，幾何学的にいえば，二次曲線が相接する場合で，特に(3)が三重根をもつときには，接触が高次である．なお（5）に掲げた連立一次方程式が不可能であることがある．幾何学的には，二次曲線の漸近線が平行または合致する場合がそれである．このような特別な場合の詳細は円錐曲線論で取り扱われている．

四次方程式　$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$

を解くことは，連立二元二次方程式

$$x^2 = y$$

$$a_0y^2+a_1xy+a_2y+a_3x+a_4=0$$

からxを求めるのと同じである．この場合（3）は

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_1}{2} & \frac{a_3}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_0 & \frac{a_2}{2}-\frac{\lambda}{2} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{a_2}{2}-\frac{\lambda}{2} & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\lambda^3-2a_2\lambda^2+(-4a_0a_4+a_2^2+a_1a_3)\lambda+a_0a_3^2+a_1^2a_4-a_1a_2a_3=0$$

になる．これは $(x_1+x_2)(x_3+x_4)$，$(x_1+x_3)(x_2+x_4)$，$(x_1+x_4)(x_2+x_3)$ を根とする三次分解方程式である．

〔**問題**〕　四次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ の解法は放物線 $x^2=y$ と円 $x^2+y^2+(p-1)y+qx+r=0$ との交わりを求めることに帰する．

$r=0$ とすれば三次方程式 $x^3+px+q=0$ の解が得られる．

第7章 不可能の証明

§ 39. 五次以上の方程式の代数的解法の不可能

1. 四次以下の方程式の解法は，既知と見なされる数から出発して，それらに四則および開法を行なって，ついに根に達するのである．このような方法を**代数的解法**といっている．

この用語は現代的には妥当でないけれども，慣例上使用されている．要するに羃根による解法の意味である．

〔定理 7.1〕 五次以上の方程式は，一般には，それを羃根によって解くことが不可能である．

この有名な定理は Abel によって確定的に証明された（1826）．それは方程式論の旋回点であった．

この定理を紹介するに当たって，Abel にしたがって，まず既知の数から四則と開羃とによって作り出される数の組織の解剖から始めることが必要である．

2. 定数または変数（文字）から成り立つ数の一区域（集団）があって，その範囲内において，有理算法（四則）が可能であるとき，そのような数の範囲を**体**または**有理区域**という．

たとえば，有理数の全部が一つの体を組成する．それは有理数から四則によって生じ来るものは有理数ばかりであるというのにほかならない．同様の意味において，実数の全部または複素数の全部がおのおの一つの体を組成する．また一つまたは二つ以上の変数の有理式の全部が一つの体を組成する．あるいはそれらの有理式に含まれる係数を有理数に限定しても同様である．

ゆえに体というのは団体などの体と同様で，幾何学にいう立体などとは趣が違う．体を有理区域ともいうが，その区域は実数軸上の区間または複素数平面上の一区域（単位円の内部など）というような意味ではない．

上に掲げた体の例において，全部という語が重要である．一つの体が α ($\neq 0$) なる数を含むとすれば，体の定義によって α/α すなわち 1 がその体に含まれ，したがって $1+1=2$，$2+1=3$，…，また $1-1=0$，$0-1=-1$，$0-2=-2$，…，したがってまた 2/3，$-2/3$ などが，その体に含まれねばならない．すなわち体はすべての有理数を含まねばならない．有理数の一部を任意に限定しても，それだけでは体を成すとはいわれないのである．

一つの体が与えられているとき，その体に含まれない数を添加して体を拡張することができる．体の拡張というのは与えられた体よりも広汎な範囲を成すところの新しい体を作り出すことをいうのである．

たとえば，有理数体に $\sqrt{2}$ は含まれない．有理数体に $\sqrt{2}$ を添加すればいかなる体が生ずるか．そのような体は $x+y\sqrt{2}$ (x, y は任意の有理数) のような数の全部を含まなければならない．さもなければ体は成り立たないのである．しかるにこのような数 $x+y\sqrt{2}$ の全部を取れば，それだけですでに一つの体が成就することは明白である．$x+y\sqrt{2}$ のような数に四則を行なうとき，その結果は同様の数の範囲以外に出ないのである．$(x+y\sqrt{2})\pm(x'+y'\sqrt{2})$ または $(x+y\sqrt{2})\times(x'+y'\sqrt{2})$ または $\dfrac{x+y\sqrt{2}}{x'+y'\sqrt{2}}$ を $x''+y''\sqrt{2}$ とすれば，$x, y, x'y'$ が有理数であるとき，x'', y'' もやはり有理数でよいのである．

一般に，一つの体（それを R と名づける）が与えられていて，α はその体に含まれない数であるとき，R に属する数と α とから四則によって作られる数の全部を一つの集団として考察すれば，それは一つの体である．そのような体を R に α を添加するときに生ずる体という［記号：$R(\alpha)$］．R に添加する数が二つ以上であっても，同様である．

たとえば，R が実数の全部から成り立つ体ならば，$R(i)$ は複素数全部の体である．また R が有理数の体ならば，それに $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ とを添加するときに生ずる $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}+w\sqrt{6}$ (x, y, z, w は任意の有理数) のような数の全部から成り立つ．

3.　以上を前おきとして，方程式の冪根解法の経路を簡明に説明することができる．方程式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を含む体を R とし，r を R に属して，しかも R に属する数の p 乗には等しくないとする．すなわち $\sqrt[p]{r}$ は R に属さないとする．さて R に $\sqrt[p]{r}$ を添加して得た体を R_1 とし，r_1 は R_1 に属し，しかも $\sqrt[q]{r_1}$ は R_1 に属さないとして，$\sqrt[q]{r_1}$ を R_1 に添加して体 R_2 を得るとする．このようにして次々に冪根の添加によって拡張された体を組成する数は，すなわち既知数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ から四則と開法とによって求められるものである．ゆえに方程式 $f(x)=0$ が冪根によって解き得るとは，その根が上のようにして得られる体に含まれることにほかならないのである．上の冪根の指数は任意の整数であるが，任意指数の冪根は素数を指数とする開冪法の反復によって得られるから，指数 $p, q, \cdots$ を素数に限ることにしてよい．

一般的の方程式においては，係数したがってまた根の間に何等特別な関係がないものとするのである．すなわち係数または根を独立な変数として扱うのである．三次および四次方程式の解法においては，次々に添加した冪根は，それを方程式の根によって表わすときは，いつも根に関する有理式となるもののみであった．五次以上の方程式においても，もしも，それが冪根のみによって解き得るとすれば，冪根は根の有理式に等しいもののみを用いて，解が可能である．これは重要な論点であるが，いましばらくそれを承認することにするならば，五次以上の一般的方程式が冪根によって解き得られないことが容易に示されるのである．

まず基礎の体 R は係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の有理式から組み立てられたもので，それらはすなわち根の対称式である．この体 R に添加すべき冪根 $\sqrt[p]{r}$ を根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の函数としてそれを $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすれば，上の仮定によって，φ は有理函数ではあるが，対称式ではあり得ない，ただし φ^p（すなわち r）は R に属するから，もちろん根の対称式でなければならない．このような有理式 φ はいかなるものであるか．$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は対称式でないから，ある二つの根の互換たとえば $(1,\ 2)$ によって変わる．よって

$$\varphi|(1,\ 2)=\varphi' \neq \varphi \tag{1}$$

とおく．しかるに φ^p は対称式であるから

$$\varphi'^p=\varphi^p|(1,\ 2)=\varphi^p.$$

ゆえに

$$\varphi'=\varepsilon\varphi \tag{2}$$

で，ε は 1 の p 乗根であるが，（1）によって $\varepsilon\neq1$.

（2）は $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して恒等式である($x_1,x_2,\cdots,x_n$ は独立変数であるから)．ゆえに（2）の両辺において $x_1,\ x_2$ を互換しても，その結果は相等しい．すなわち（1）によって

$$\varphi=\varepsilon\varphi',$$

したがって

$$\varphi=\varepsilon^2\varphi,$$

$$\varepsilon^2=1.$$

ゆえに ($\varepsilon\neq1$ を用いて)

$$\varepsilon=-1.$$

しかるに $\varepsilon^p=1$ で，p は素数であるから，$p=2$.

ゆえに最初に開くべき冪根は平方根で，その平方根は互換によって符号だけを変えるものすなわち交代式でなければならない．ゆえにその平方根を R に添加して得られる体 R_1 を組成するものは $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の函数としては S_1+PS_2 のような形の式の全部である．S_1,S_2 は任意の対称式で，P は§27の交代式である．これらはすなわち偶の置換群に対応する有理式である(§32).

さて次に R_1 に添加すべき冪根を $\sqrt[q]{r_1}$ として，それを $x_1,x_2,\cdots,x_n$ で表わして $\psi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ とすれば，仮定によって ψ は有理函数である．$\psi=\sqrt[q]{r_1}$ はもちろん R_1 には属さないから，ψ は三つの変数の循環置換，たとえば (1, 2, 3) によって変わる．さもなくば，ψ は R_1 に属するであろう(§30，問題 3)．よって

$$\psi|(1,2,3)=\psi'\neq\psi \tag{3}$$

とおく．しかし ψ^q は R_1 に属し，したがって偶置換 (1,2,3) によって変わらないから

$$\psi^q=\psi'^q.$$

したがって

$$\psi'=\omega\psi, \qquad \omega^q=1, \qquad \omega\neq 1.$$

すなわち

$$\psi(x_2, x_3, x_1, \cdots)=\omega\psi(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

この恒等式の両辺において置換 (1,2,3) を 2 回行なえば

$$\psi(x_3, x_1, x_2, \cdots)=\omega\psi(x_2, x_3, x_1, \cdots),$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \cdots)=\omega\psi(x_3, x_1, x_2, \cdots),$$

したがって

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \cdots)=\omega^3\psi(x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

ゆえに

$$\omega^3=1.$$

$\omega\neq 1$ であるから $\omega^q=1$ から，q は 3 の倍数，q は素数であるから $q=3$.

ゆえに第 2 回に開くべき冪根は三乗根でなくてはならない.

実際，二次方程式でも，三次方程式でも，第 1 回に開くのは判別式の平方根で（定数因子は別として），その平方根はすなわち根の交代式である．二次方程式はそれで解けてしまうが，三次方程式では，第二回に三乗根を開いたのである．四次方程式の場合には，まず三次分解式を解いたのであるが，どのような三次分解式でも，その判別式は，定数因子を別にして考えれば，すなわち四次方程式の判別式であるから，やはり第一には判別式の平方根を開いて，第 2 回に三乗根を開くのであった．

しかるに五次以上の場合には，五つの根の循環置換は偶置換であるから，それを ψ^3 に適用しても ψ^3 は変わらない．ゆえにもしその際 ψ が変わるとしても，ψ には 1 の三乗根 ω が乗じられるだけである．いまこの循環置換を 5 回適用すれば，前のように $\omega^5=1$ を得るから，$\omega=1$ でなければならない．すなわち ψ は五つの根の任意の循環置換によって変えられないものである．

さて

$$(1\,3\,2\,4\,5)(3\,2\,1\,5\,4)=(1\,2\,3)$$

であるから，ψ が (13245) によっても，(32154) によっても変わらないならば，ψ は (123) によっても変わらない．それは上の仮定（3）に矛盾する．

要するに，五つ以上の変数の場合には $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 自身が交代式でなくて，しかも ψ^q が交代式になるというようなことが不可能なのである．ただしここで交代式とは広い意味でいう．すなわち偶置換だけで変わらない有理式を指している．

このような ψ がないとすれば，$f(x)=0$ が冪根だけで解けるときには，それはただ一つの平方根だけで解かれてしまって

$$x_1=S_1+PS_2$$

のようにならねばならない．これは $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する恒等式であり得ないから，つまり五次以上の一般的方程式は冪根だけでは解き得られないのである．

§ 40.　前節の続き，証明の根拠

1.　前節で，五次以上の一般的方程式が冪根によって解けないことの証明を述べたが，その証明は一つの重大な仮定のもとにおいてのみ有効なものである．すなわち冪根での解法が可能ならば，解法において用いられる冪根は，方程式の根の函数としては，有理函数であると仮定したのである．本節において，この仮定が正当であることを説明するために，まず次の定理から始める．

〔**定理 7.2**〕 R は与えられた体，p は素数，r は R に含まれる数で，$\sqrt[p]{r}$ は R に含まれないとすれば，$R(\sqrt[p]{r})$ は

$$a_0+a_1\sqrt[p]{r}+a_2(\sqrt[p]{r})^2+\cdots+a_{p-1}(\sqrt[p]{r})^{p-1} \tag{1}$$

のような数の全部から成り立つ．ただし $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ は R に属する任意の数である．$R(\sqrt[p]{r})$ に属する数はただ一様にこのような形に表わされる．

〔**証**〕 簡明のために，R に属する数を一般的にローマ字 $a, b, \cdots$ などで表わし，また $\sqrt[p]{r}=\alpha$ とする．また $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ を 1 の p 乗根とする．$R(\alpha)$ を組成する数は R に属する数と α とから四則によって作り出される数の全部である．このような数は

$$\xi=\frac{b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\cdots}{c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots} \tag{2}$$

のような形に表わされるであろう．ただし $\alpha^p=r$ は R に属して，$\alpha^{p+1}=r\alpha$, $\alpha^{p+2}=r\alpha^2, \cdots$ であるから，(2) の右辺において，分母も分子も α に関する $p-1$ 次以下の整式と見てさしつかえない．

さて ξ を (1) のような形に表わすには，分母を有理化すればよい．すなわち (2) の分母，分子に

$$c_0+c_1\varepsilon^n\alpha+c_2\varepsilon^{2n}\alpha^2+\cdots \qquad (n=1,2,\cdots,p-1)$$

を掛けるのである．

(2) の右辺を仮りに

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$$

としるそう．すなわち $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ は α に関する $p-1$ 次以下の整式で，その係数は R に属するものである．しからば上の変形によって

$$\xi=\frac{f(\alpha)\cdot g(\varepsilon\alpha)\cdot g(\varepsilon^2\alpha)\cdots g(\varepsilon^{p-1}\alpha)}{g(\alpha)\cdot g(\varepsilon\alpha)\cdot g(\varepsilon^2\alpha)\cdots g(\varepsilon^{p-1}\alpha)}$$

を得る．ここで，分母は $x^p=r$ の根である $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha, \cdots, \varepsilon^{p-1}\alpha$ に関する対称式であるから，それは c_0, $c_1, \cdots$ および r の整式に等しく，すなわち R に属する数である (定理 5.1)．それを d とする．

また分子において

$$g(\varepsilon\alpha)g(\varepsilon^2\alpha)\cdots g(\varepsilon^{p-1}\alpha)$$

は $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1=0$ の根である $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{p-1}$ に関する対称式であるから，$c_0, c_1, \cdots$ および α の整式に等しく，したがって R に属する係数をもつ α の整式に等しい．それに $f(\alpha)$ を掛けた ξ の分子は，やはり同様の整式であるから，$\alpha^p=r$ を用いて，それを α に関して $p-1$ 次以下の整式，すなわち

$$k_0+k_1\alpha+k_2\alpha^2+\cdots+k_{p-1}\alpha^{p-1}$$

のように表わすことができる．ゆえに

$$\xi=\frac{k_0}{d}+\frac{k_1}{d}\alpha+\frac{k_2}{d}\alpha^2+\cdots+\frac{k_{p-1}}{d}\alpha^{p-1},$$

すなわち ξ は (1) のような形に表わされる．

ここまではpが素数であるという仮定を用いないでたどりついたのである．さて ξ を（1）のような形に表わすことがただ一様に可能であることの証明が残っている．

仮りに ξ が二通りに（1）のような形に表わされると想像するならば，その差を取って

$$F(\alpha)\equiv r_0+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_{p-1}\alpha^{p-1}=0 \qquad (3)$$

のような等式が生ずる．そうすれば，α が R に属する係数をもつ p よりも低次である方程式 $F(x)=0$ を満足させるということになるから，$F(x)$ と x^p-r とを x に関する多項式と見て，それらに Euclid の法式を適用すれば，x^p-r を R に属する係数をもつ因数に分解できることになる．そこで問題は，p が素数のとき，x^p-r が R において既約であることの証明に帰する．ここが定理 7.2 の契点である．

係数が有理区域 R に属する多項式の割り算を行なうときは，商の係数も剰余の係数も R に属する．ゆえに Euclid の法式において R に属しない係数が出て来る機会はない．

ある多項式が R において可約または既約とは，それを R に属する係数をもつ因数に分解することが可能または不可能であることをいうのである．

いま仮りに x^p-r が R に属する係数をもつ多項式 $x^m+\cdots\pm c$ $(0<m<p)$ で割り切れるとすれば，c は x^p-r の根である $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha, \cdots, \varepsilon^{p-1}\alpha$ の中の m 個の積に等しい．したがって

$$\varepsilon'\alpha^m=c$$

で，ε' は 1 の p 乗根である．ゆえに

$$r^m=c^p.$$

さて $0<m<p$ で，p は素数であるから，$mh=pk+1$ になるような整数 h, k がある．ゆえに

$$r^{mh}=r^{pk}r=c^{ph}$$

したがって

$$r=\left(\frac{c^h}{r^k}\right)^p,$$

すなわち r は R に属する数の p 乗に等しい．それは r に関する約束に矛盾する．

この矛盾は（3）において $F(\alpha)$ が形式的に 0 に等しくないという仮定から生じたのである．ゆえに（3）が成り立てば $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ は全部 0 である．

後にこの意味において上の定理を引用する．

2. さて方程式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

が代数的に解き得ると仮定するとき，その解法において必要な素数次の冪根を $\sqrt[p]{r}, \sqrt[q]{r_1}, \cdots$ とすれば，これらの冪根は $f(x)$ の根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と 1 の p 乗根，q 乗根，…との有理式として表わし得ることを示そう．

今度は代数的解法において最後に出て来る冪根を第一に考察することになるから，記号簡約のために，その冪根を $\sqrt[p]{r}=\alpha$ とし，r を含む体を R とする．すなわち r は体 R に属するが，$\sqrt[p]{r}$ は R には属さないとするのである．よって $f(x)$ の一つの根 x_1 が

$$x_1=r_0+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_{p-1}\alpha^{p-1} \qquad (4)$$

のような形に表わされると仮定する．$r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ は R に属する数を示すのである（定理 7.2）．

まず計算を簡約するために，（4）において $r_1=1$ と仮定してもよいことを説明する．

（4）において $r_1\neq0$ ならば，α の代わりに $r_1\alpha$ を取ってもよい．それは $\sqrt[p]{r}$ の代わりに $\sqrt[p]{r_1{}^pr}$ を取るのであって，$r_1{}^pr$ は R に属するが，$\sqrt[p]{r_1{}^pr}=r_1\sqrt[p]{r}$ は R に属さないのであるからさしつかえない．もし（4）において $r_1=0$ ならば，（4）の右辺の項の中で 0 に等しくない最初のものを $r_m\alpha^m$ としよう（r_0 以外の各項がすべて 0 になることはない．もししからば $\sqrt[p]{r}=\alpha$ は解法に不要な冪根である）．しからば $r_m\alpha^m$ を α に代用することができる．なぜならば，$0<m<p$ で，p は素数であるから，$mh-pk=1$ になるような整数 h, k が求められて，

$$\alpha=\frac{\alpha^{mh}}{\alpha^{pk}}=\frac{(\alpha^m)^h}{r^k}.$$

ゆえに $r_m\alpha^m=\alpha'$ とおけば

$$\alpha=\frac{\alpha'^h}{r_m^h r^k},$$

したがって α の各冪は α' の冪に R に属する数（$1/r_m^h r^k$ など）を掛けたものに等しく，また α'^p は R に属するから，α' の冪は $\alpha'^\nu(\nu=0,1,2,\cdots,p-1)$ に，R に属する数を掛けたものに等しい．ゆえに（４）を

$$x_1=r_0'+\alpha'+r_2'\alpha'^2+\cdots+r'_{p-1}\alpha^{p-1}$$

のような形に表わすことができる．$r_0',r_2',\cdots,r'_{p-1}$ は R に属する数である．よって記号簡約のために（４）の代わりに

$$x_1=r_0+\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_{p-1}\alpha^{p-1} \tag{5}$$

$(\alpha^p=r)$ とおく．

さて $f(x)$ において x に x_1 を代入すれば，

$$s_0+s_1\alpha+s_2\alpha^2+\cdots+s_{p-1}\alpha^{p-1} \tag{6}$$

のような形の数を得る．$s_0,s_1,\cdots,s_{p-1}$ は R に属する数である．仮定によって $f(x_1)=0$ であるから，（６）は 0 に等しい．したがって（定理 7.2）

$$s_0=0,\ \ s_1=0,\ \ s_2=0,\cdots,s_{p-1}=0. \tag{7}$$

いま ω を 1 の虚数 p 乗根として，（５）の代わりに

$$r_0+\omega\alpha+r_2(\omega\alpha)^2+\cdots+r_{p-1}(\omega\alpha)^{p-1} \tag{8}$$

を $f(x)$ の x に代入すれば

$$s_0+s_1(\omega\alpha)+s_2(\omega\alpha)^2+\cdots+s_{p-1}(\omega\alpha)^{p-1}$$

になるから，（７）によって，この代入の結果は 0 に等しい．ゆえに（８）は $f(x)$ の根である．1 の虚の p 乗根は $\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{p-1}$ であるから，つまり

$$\begin{aligned}
x_1&=r_0+\alpha+r_2\alpha^2+r_3\alpha^3+\cdots+r_{p-1}\alpha^{p-1},\\
x_2&=r_0+\omega\alpha+r_2\omega^2\alpha^2+r_3\omega^3\alpha^3+\cdots+r_{p-1}\omega^{p-1}\alpha^{p-1},\\
x_3&=r_0+\omega^2\alpha+r_2\omega^4\alpha^2+r_3\omega^6\alpha^3+\cdots+r_{p-1}\omega^{2(p-1)}\alpha^{p-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_p&=r_0+\omega^{p-1}\alpha+r_2\omega^{2(p-1)}\alpha^2+r_3\omega^{3(p-1)}\alpha^3+\cdots+r_{p-1}\omega^{(p-1)^2}\alpha^{p-1}
\end{aligned}$$

が $f(x)$ の根である．これらの等式に $1,1,1,\cdots,1$ または $1,\omega^{-1},\omega^{-2},\cdots,\omega^{-(p-1)}$ または $1,\omega^{-2},\omega^{-4},\cdots,\omega^{-2(p-1)}$；$\cdots$ を掛けて加えると

$$r_0=\frac{1}{p}(x_1+x_2 \qquad +\cdots+ \qquad x^p),$$
$$\alpha=\frac{1}{p}(x_1+\omega^{-1}x_2+\cdots+\omega^{-(p-1)}x_p),$$
$$r_2\alpha^2=\frac{1}{p}(x_1+\omega^{-2}x_2+\cdots+\omega^{-2(p-1)}x_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{p-1}\alpha^{p-1}=\frac{1}{p}(x_1+\omega^{-(p-1)}x_2+\cdots+\omega^{-(p-1)^2}x_p)$$

を得る．すなわち $r_0, \alpha, r_2\alpha^2, \cdots, r_{p-1}\alpha^{p-1}$，したがってまた $\alpha, r_0, r_2, \cdots, r_{p-1}$ が，$f(x)$ の根である $x_1, x_2, \cdots, x_p$ と 1 の p 乗根 ω との有理式として表わされるのである．

すなわち $f(x)=0$ の冪根解法が可能であるときには，その解法において必要な最後の冪根 α に関しては，本節の冒頭に掲げた事柄が証明されたのである．

3. さて（5）において，$r_0, r_2, \cdots, r_{p-1}$ は R に属するから，$f(x)=0$ の解法において，最後より以前に出て来る冪根を含む数である．いまこれらの中の任意の一つを y_0 とおけば，上に示したように

$$y_0=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_p).$$

ここで，φ は $f(x)$ の根 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ に関する有理式で，その係数は 1 の p 乗根 ω を含む数である．y_0 は

$$F(y)=0$$

のような方程式を満足させる．ただし F における係数は原方程式の係数と ω とから有理的に組み立てられる数で，また $F(y)$ の根は y_0 のほか，$y_1=\varphi(x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda)$ のように，$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ における $x_1, x_2, \cdots, x_p$ を $f(x)$ の根 $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda$ でおき換えたものばかりである（定理 5.6）．

さて y_0（すなわち $r_0, r_2, \cdots, r_{p-1}$ の中のあるもの）は $f(x)$ の解法において最後より前に出て来る冪根だけ（および対応する 1 の冪根）を含む数であるから，上と同様に，それらの冪根の中の最後のものは $F(y)$ の根 $y_0, y_1, \cdots$ によって有理的に表わされる．$y_0, y_1, \cdots$ はいずれも $f(x)$ の根の有理式として表わされるから，この冪根もまた $f(x)$ の根の有理式に等しい．

このように論じて行けば，$f(x)=0$ の解法において必要なすべての冪根が，$f(x)$ の根と 1 の冪根とによって有理的に表わされることが確定し，したがって五次以上の一般的方程式を解くことが不可能であることの証明が完結する．

上記は Abel の原証明に些細の変改を加えたものである．有理区域の思想はこの証明法を発端として成育されたものである．

現今流布本においては Abel の証明はほとんど跡を絶とうとしている．五次以上の一般的方程式が冪根によって解かれないことを，現今の体の論では，一層広汎な定理の特別の場合として，きわめて手軽に出してしまう．飛行機から登山の路を見させるようなものである．ここでは大掛りの準備をしないで，最初の踏破者の足跡を追って見たのである．それは無用ではあるまいと思われる．

§ 41. 実根のみを有する三次方程式

前節に述べた証明の副産物として，三次方程式論において残しておいた Cardano の公式の簡約不可能の問題を片づけることができる．すなわち問題は次の通り．

実係数をもつ三次方程式 $f(x)=0$ が係数の有理区域において既約であるとする．もし $f(x)=0$ が三つの実根をもつならば，それを実の冪根によって解くことは不可能である．

冪根の添加によって次から次へと有理区域を拡張して，ついに最後の冪根 $\alpha=\sqrt[p]{r}$ を添加する前の有理区域を R とすれば，一つの根 x_0 は

$$x_0=r_0+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_{p-1}\alpha^{p-1}=G(\alpha) \qquad (1)$$

の形に表わされる（定理 7.2）．そのとき，α に $\omega\alpha, \omega^2\alpha, \cdots, \omega^{p-1}\alpha$ を代用して得られる $G(\omega\alpha)$，$G(\omega^2\alpha), \cdots, G(\omega^{p-1}\alpha)$ もまた $f(x)=0$ の根である（204頁参照）．

もしも $f(x)=0$ が実の冪根だけで解けるとすれば，$r_0, r_1, \cdots, r_{p-1}$ もまた α も実数である．しかるに $G(\alpha)$，$G(\omega\alpha), \cdots$，$G(\omega^{p-1}\alpha)$ が $f(x)$ の根であるから，$p=3$ で，かつ $G(\omega\alpha)$，$G(\omega^2\alpha)$ は虚数であるから，これは矛盾である．このようにいってしまえば，それで問題は終結する．事実その通りではあ

るが，それを断言するには相当の考慮を要するのである．

まず R において $f(x)$ はまだ既約であると仮定してさしつかえない．$f(x)$ が R において因数に分解されるならば，少なくとも一つの因子は一次であるから，R よりも前の有理区域を R に代用して，すでに一つの根が（1）のような形に表わされるであろう．

さて

$$G(\alpha),\ G(\omega\alpha),\cdots,\ G(\omega^{p-1}\alpha) \qquad (2)$$

が $f(x)$ の根であっても，それらが相等しくないことは，まだ保証されていないから，直ちに $p=3$ と断言することができない．いま

$$F(x)=(x-G(\alpha))(x-G(\omega\alpha))\cdots(x-G(\omega^{p-1}\alpha))$$

なる積を x の降冪に展開すれば，各係数は x^p-r の根である $\alpha,\omega\alpha,\cdots,\omega^{p-1}\alpha$ に関して対称であるから，$F(x)$ の係数は R に属する．しからば $F(x)$ は $x=G(\alpha)$ という根を $f(x)$ と共有するから，$F(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．これは $f(x)$ は R において既約とした仮定に基づくのである．

$F(x)$ と $f(x)$ との最大公約数を互除法によって求めるならば，その係数は R に属する．それが $f(x)$ の約数であることを要して，$f(x)$が既約であるから，最大公約数は $f(x)$ 自身でなければならない．

上の（2）の数はいずれも $f(x)$ の三つの根 x_0,x_1,x_2 以外のものではあり得ないが，$F(x)$ が $f(x)$ で割り切れるから，（2）の中に x_0 も x_1 も x_2 も実際あるのである．

さて（2）の中に x_0,x_1,x_2，が各々同一の回数を以て含まれていることを示そう．そうすれば p が 3 の倍数であることがわかる．しかるに p は素数であるから，$p=3$ が得られる．

いま仮りに（2）の中に x_0,x_1,x_2 が不揃いに含まれていて，最小回数に含まれるものは k 回とすれば，$F(x)$ は $[f(x)]^k$ で割り切れる．その商を $F_1(x)$ とすれば，$F_1(x)$ はやはり R に属する係数をもつが，$F_1(x)$ は因数として $x-x_0,\ x-x_1,\ x-x_2$ の中のあるものを含まず，あるものを実際含むことになるから，$F_1(x)$ と $f(x)$ とは互いに素ではないが，その最大公約数が一次ま

たは二次にならねばならない．その最大公約数の係数は R に属し，$f(x)$ が R において既約であるから，これは不合理である．

ゆえに $p=3$ で，（2）は

$$x_0=r_0+r_1\alpha \quad + \quad r\alpha^2,$$
$$x_1=r_0+\omega r_1\alpha+\omega^2 r_2\alpha^2, \qquad (\omega^3=1)$$
$$x_2=r_0+\omega^2 r_1\alpha+\omega r_2\alpha^2$$

のような三つの数である．

ゆえに，もしも $f(x)=0$ の一つの根 x_0 が実冪根だけで表わされるとすれば，他の二つの根 x_1, x_2 は共役複素数であるからともに虚数である（さもなくば，$x_1=x_2=r_0$ にならねばならない．それは $f(x)$ が既約であるという仮定に矛盾する）．

以上を要約して次の結果を得る．

〔**定理 7.3**〕 三次方程式 $f(x)=0$ がある有理区域において既約ならば，その代数的解法は最後に立方根を要する．三根ともに実数ならば，それは実立方根ではあり得ない．もしも解が立方根なしに（たとえば平方根だけで出来るならば），$f(x)$ は初めから可約である．

この結論の最後の一段は初めの部分の対偶である．それを用いて，初等幾何学において不可能な作図問題の解釈をすることができる．

§ 42. 初等幾何学の不可能な作図問題

1. 初等幾何学の作図問題では，定木とコンパスだけを用いることが許される．定木は既知の二点を通る直線を引くためにのみ用いられ，コンパスは既知の点を中心として既知の点を通る円を描くためにのみ用いられる．ただしそのようにして描かれた直線または円が交わるならば，その交点を見出すことは可能として黙許されるのである．

このような制限のために，多くの作図問題が不可能になる．なかんずく有名なのは任意の角の三等分の問題である．任意の角の三分の一に等しい角は無論あるが，定木とコンパスとだけでそれを作図することが不可能であるというの

である．あたかも任意の方程式に根はあっても，四則と開冪とだけで，その根を表わすことは，非常に特別な場合に限るようなものである．

上の意味における作図問題は，つまり若干の点が与えられているとき，ある与えられた条件に適合するような点を，定木とコンパスとだけを用いて見出だそうということに帰する．いまそのような作図が可能であるとき，それを解析幾何学の言葉に翻訳すれば，どのようになるであろうか．

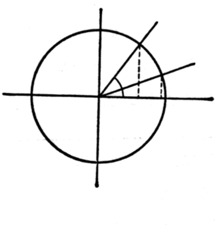
直交軸に関して既知の点の座標を $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots$ などとし，既知数 a_1, b_1, a_2, $b_2, \cdots$ を含む有理区域を R とする．既知の点を結ぶ直線，または既知の点を中心として既知の点を通る円は R に属する数を係数とする一次または二次の方程式で表わされ，それらの交点の座標は R に平方根を添加して得られる有理区域に属する数であることは見やすい．

要点をいえば，$x^2+y^2+ax+by+c=0$,　$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ のような連立二元二次方程式が，高々平方根だけで解けるのである．

ゆえに可能な作図問題は，解析的には平方根だけで解かれる方程式に帰するのである．

たとえば立方を2倍する問題が不可能である．一つの立方の稜が与えられているとき，2倍の体積をもつ立方の稜を作図すること，すなわち与えられた稜を長さの単位とすれば，$x^3=2$ を解こうというのが問題であるが，2は有理数の体において立方数でないから，この三次方程式は既約（定理 7.2），したがって平方根だけでは解かれない（定理 7.3）．ゆえにこの作図問題は不可能である（誰かがこの作図問題を定木とコンパスとだけで解いたと仮定すれば，その作図を解析的に表わして $x^3=2$ を平方根だけで解くことができる筈である）．

2.　同様の立場から角の三等分の問題を考察する．



任意の角が与えられているとき，角 $\frac{\alpha}{3}$ の作図が可能ならば，$\cos\alpha$ から平方根ばかりによって $\cos\frac{\alpha}{3}$ が求められなければならない．いま

$$x=2\cos\frac{\alpha}{3}, \qquad a=2\cos\alpha$$

とおけば

$$x^3-3x-a=0. \tag{1}$$

すなわちこの三次方程式がaを含む有理区域において可約，したがって一次因数をもつことが必要である．

通常の意味における作図問題では，与えられた任意の要素のいかんに関係のない一定の方法によって作図することが要求される．その場合には，任意の要素に対応する既知数を独立の変数と見なすべきである．たとえば任意の角の三等分の問題においては，（1）におけるaを変数と見なすべきである.* しからば角の三等分の不可能は，二つの変数 x, a に関する多項式 x^3-3x-a が分解不可能であるということに帰する（参照，§ 25.）.

この多項式が分解不可能であることは，その形を一見して明白である．この多項式はaに関して一次であるから，分解が可能ならば，xのみを含む因数がなければならない．したがって（1）は定数である根をもたねばならないが，それは不可能である．

3.　角の三等分が一般的に不可能であっても，ある特定の角の三等分は別問題である．たとえば 45° の角または 36° の角の三等分は可能である．しかしその方法は与えられた角の性質に従って変わる．

15° の角の作図は直角の六等分によってできる．12° の角は 72°（正五角形の中心角）と 60° との角の差として作図される$\left(\frac{\pi}{15}=\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)$.

円周の 2^n 等分，3等分，5等分，17等分，（p が 2^m+1 なる形の素数であるとき，p 等分）が可能であるから，

$$\frac{k\pi}{2^n\cdot 5\cdot 17\cdots\cdots p\cdots}$$

のような角の三等分が可能である．k は任意の整数で分母には 5, 17, または上の p のような素数が各々一つだけは含まれていてよい．解法は $\frac{k}{2^n\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdots\cdots}$ の部分分数への分解によるのである．

* 幾何学の作図では，与えられた既知の量のほかに，任意の点を取り，また任意の長さを用いることがある．その場合には，それらの任意の変数を基本の有理区域 R (195頁)の中に入れておくべきである．しかし，それらが任意であるから，元の R の中から取られたものと見てもよいであろう．

このような意味において a がいかなる特定の数であるとき，有理区域 $R(a)$ において x^3-3x-a が x に関する一次因数をもつか（いかなる特定の角が与えられたとき，その三等分が可能であるか），という問題が生ずる．この問題をここで取り扱うことは困難である．

〔**問題 1**〕 a が有理数であるとき，（1）が有理係数をもつ因子に分解されるためには，a を既約分数の形に表わすとき，分母が立方数であることが必要である．

〔解〕 分解が可能ならば（1）は一つの有理根をもつ．それを $\dfrac{p}{q}$ とし p, q は互いに素であるとすれば，$a=\dfrac{p(p^2-3q^2)}{q^3}$．この分数は既約である．

〔**問題 2**〕 ある有理区域において既約な方程式 $f(x)=0$ が平方根だけで解かれるならば，次数は 2 の冪である．

〔解〕 有理区域 R では $f(x)$ はまだ既約で，$R(\sqrt{r})$ において分解ができるとする．その因数における係数は $a+b\sqrt{r}$ のような形の数（a, b は R に属する）であるから，

$$f(x)=\{\varphi(x)+\sqrt{r}\psi(x)\}\{g(x)+\sqrt{r}h(x)\} \qquad (2)$$

のような等式が成り立つ．ここで φ, ψ, g, h は R に属する係数をもつものであるが，$f(x)$ が R において既約であるから，φ と ψ とも，また g と h とも，互いに素である．さて（2）から

$$f(x)=\varphi(x)g(x)+r\psi(x)h(x)+\sqrt{r}\{\varphi(x)h(x)+\psi(x)g(x)\}.$$

両辺の係数を比較すれば

$$\varphi(x)h(x)+\psi(x)g(x)=0$$

を得る．しかるに φ と ψ とが互いに素であるから，$g(x)=C\cdot\varphi(x)$．したがって $h(x)=-C\psi(x)$．g, h も互いに素であるから，C は R に属する定数である．ゆえに（2）は次のようになる：

$$f(x)=C\{\varphi(x)+\sqrt{r}\psi(x)\}\{\varphi(x)-\sqrt{r}\psi(x)\}. \qquad (3)$$

すなわち $f(x)$ は同次の二つの因数の積に分解される．さて $f(x)$ は平方根だけで解けるから，有理区域を段々に拡張して行くときに，ついに一次因数に分解されてしまうのであるが，分解ができるごとに，次数が半減されて行くのであるから，$f(x)$ の次数は 2 の冪でなければならない．

〔注意〕（3）の右辺の各因数は $R(\sqrt{r})$ において既約である．上の証明で，$\varphi+\sqrt{r}\psi$ を $f(x)$ の任意の因数として，その次数が $f(x)$ の次数の半分に等しいことが出て来た

のであるから，$R(\sqrt{r})$ における $f(x)$ の分解は定数因子を別にしていえば，(3)のほかにはない．

〔**問題 3**〕 四次方程式が平方根だけで解かれるために必要かつ十分な条件は三次分解方程式が一つの有理根をもつことである．有理根とは四次方程式の係数の有理式として表わし得る根を意味する．

〔解〕 三次分解方程式に有理根があれば，四次方程式が平方根だけで解けることは，四次方程式の解法からわかる．逆に四次方程式が平方根だけで解けるならば，三次分解方程式の根（$x_1x_2+x_3x_4$ など）は平方根だけで表わされる．ゆえに三次分解方程式は初めから可約であって，少なくとも一つの有理根をもつ（定理 7.3）．

〔**問題 4**〕 任意の角の n 等分が作図問題として可能であるのは，n が 2 の冪であるときに限る．

〔解〕 $a=\cos\alpha$，$x=\cos\dfrac{\alpha}{n}$ とすれば $f(x)=a$．ただし $f(x)=C_0x^n+\cdots+C_n$ は有理係数をもつ n 次の多項式である．ゆえに a を変数とすれば，$f(x)-a$ は分解不可能である．それが平方根だけで解けるならば，$n=2^m$（問題 2）．

〔**問題 5**〕 $p\neq 2$ を素数とすれば，正 p 角形の作図が可能であるのは，$p=2^m+1$ であるときに限る．

〔解〕 1 の p 乗根 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ は $p-1$ 次の方程式

$$x^{p-1}+x^{p-1}+\cdots+1=0 \tag{4}$$

の根である．正 p 角形の作図が可能ならば，$\cos\dfrac{2\pi}{p}$ が有理数から出発して平方根ばかりによって表わされなければならない．したがって（4）が平方根で解けねばならない（4）は有理数の体において既約であるから，* 作図が可能であるのは $p-1=2^m$ のときに限る．

$p=2^m+1$ のときには，実際作図は可能である（しかし，それがここで証明されたのではない）．

〔注意〕 2^m+1 が素数であるのは，m が 2 の冪であるときに限る（m が奇数 h で割り切れるならば，$m=hk$ とおくとき，$2^m+1=2^{hk}+1=(2^k+1)(2^{k(h-1)}-2^{k(h-2)}+\cdots+1)$

---

* 方程式（4）が既約であることは，x に $y+1$ を代入して，§24，問題 1 を適用すればわかる．

は 2^k+1 で割り切れる). ゆえに 2^m+1 の形の素数は $m=2^n$ なるものの中から求められるべきものである. 現今知られているのは, 次の五つである.

n	0	1	2	3	4
p	3	5	17	257	65537

$n=5$ のときは, $2^{32}+1$ は素数でなく, 641×6700417 に等しい.

第8章 行　列　式

§43. 行列式の起源

1. 行列式の起源は連立一次方程式の一般的解法にある．西洋の数学史では行列式は Leibniz の書簡 (1678) 中の記載を初出とするが，その書簡は後年に発見されたのである．その後 Cramer が曲線論に関する著書 (1750) において任意数の未知数を含める一次方程式の解法を示してから，ようやく学界の注意をひき起こし，後に Cauchy (1815), Jacobi (1841) に至って，現今の行列式論の基礎が出来たのである．

いまここで行列式論を説明するに当たって，行列式をすでに出来上がったものとして，突然その定義を述べることをしない．それはあまりに奇異の感を与えるであろう．われわれはむしろ Leibniz や Cramer やの立場に帰って，いかにして連立一次方程式の解法から，行列式なるものが自然に出て来ねばならないかを説明しようとするのである．

2. 二元一次方程式の解法は周知であるがわれわれはそれを出発点とする．二つの未知数 x, y を含める連立一次方程式が次のような形

$$\begin{array}{l|cc} a_1x+b_1y+c_1=0 & b_2 & -a_2 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 & -b_1 & a_1 \end{array}$$

で与えられているとき，それから一つの未知数を消去して，他の一つの未知数のみを含む方程式を得るには，これらの方程式にそれぞれ $b_2, -b_1$ または $-a_2, a_1$ を掛けて後加えればよい。そうすれば

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(c_1b_2-c_2b_1)=0, \qquad (a_1b_2-a_2b_1)y+(a_1c_2-a_2c_1)=0$$

を得て，それから

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

を得るのである．

このような消去の方法は未知数が二つよりも多い場合にも適用されることは明らかである．すなわち与えられた方程式を二つずつ組み合わせて，それから未知数の中の一つを消去して，しだいに未知数の数を減少させて，ついにはただ一つの未知数を含む方程式に達するのである．しかしながら，その最後の結

果として得られる解の公式を予知することは簡単でない．

しかるに上の二元一次方程式の解法に立ち返って，解の公式の組立てに注意するならば，そこに，この公式を三元以上の場合に拡張する手掛りが発見される．上の公式を一見して直ちに眼につくことは，分母分子に同形の式が現われていることである．その形は

$$u_1v_2-u_2v_1$$

で，この式に特異な性質は，それが u_1, u_2 および v_1, v_2 なる二組の文字に関して斉次一次式であり，かつその二組が一致するとき $(u_1=v_1, u_2=v_2)$ には，常に0に等しくなることである．上の式のこの性質を唯一の根拠として，二元一次方程式の解の公式を導き出すことができるのであるが，それを説明するに先だって，念のために，一般の斉次一次式に関して述べておく必要がある．

3. 任意数の文字 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ に関する斉次一次式とは，次のような形の式である．

$$\varphi(u_1, u_2\cdots, u_n)=C_1u_1+C_2u_2+\cdots+C_nu_n. \quad (1)$$

ここで係数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ は定数である．

斉次一次式は次のような性質をもつ．

1°)　$\varphi(0, 0, \cdots, 0)=0.$

2°)　$\varphi(u_1+u_1', u_2+u_2', \cdots, u_n+u_n')=\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n)+\varphi(u_1', u_2', \cdots, u_n').$

3°)　$\varphi(u_1t, u_2t, \cdots, u_nt)=t\cdot\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n).$

これらは（1）から容易に知られる．また2°）において u_1+u_1' などを二つより多くの文字の和としても同様の結果を得るから，3°）と組合わせて，一般に

4°)　$\varphi(u_1t+u_1't'+u_1''t''+\cdots, \cdots, u_nt+u_n't'+u_n''t''+\cdots)$

$$=t\varphi(u_1, \cdots, u_n)+t'\varphi(u_1', \cdots, u_n')+t''\varphi(u_1'', \cdots, u_n'')+\cdots$$

を得る．1°), 2°), 3°）はすべて 4°）の特別の場合である．4°）において $t=t'=t''=\cdots=0$ とすれば 1°）を得，また $t=t'=1$, $t''=\cdots=0$ とすれば 2°）を得，$t'=t''=\cdots=0$ とすれば 3°）を得る．

これは簡単明瞭であるが，次の説明はただこれだけを基礎にするのである．

4. さて二元一次方程式に立ち返って，方程式の左辺を f_1, f_2 で表わし

$$f_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0, \quad f_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$$

とおく．また a_1, a_2 に関する斉次一次式

$$a_1b_2-a_2b_1$$

を $\varphi(a_1, a_2)$ としるす．しからば

$$\varphi(b_1, b_2)=0.$$

$\varphi(a_1, a_2)$ において a_1, a_2 に f_1, f_2 を代入すれば，上の 4°) によって

$$\varphi(f_1, f_2)=x\varphi(a_1, a_2)+y\varphi(b_1, b_2)+\varphi(c_1, c_2),$$

すなわち

$$\varphi(f_1, f_2)=x\varphi(a_1, a_2)+\varphi(c_1, c_2).$$

これは恒等式であって，x, y の値のいかんにかかわらず，常に成り立つものである．

いま x, y は上の二元一次方程式を満足させるものとすれば，$f_1=0, f_2=0$，したがって $\varphi(f_1, f_2)=0$ (1°) 参照)．その場合には

$$x\varphi(a_1, a_2)+\varphi(c_1, c_2)=0.$$

したがって

$$x=-\frac{\varphi(c_1, c_2)}{\varphi(a_1, a_2)}.$$

これは上出の x の公式と同じものである．y の値も同様にして得られる．

5.　このような考察は任意数の未知数の場合にも適用される．いま n 個の未知数 $x, y, z, \cdots$ を含む n 個の連立一次方程式の一組が，次のような形で与えられているとする．

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+\cdots+k_1=0, \\ f_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+\cdots+k_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n \equiv a_nx+b_ny+c_nz+\cdots+k_n=0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

さてここに次のような整式 Δ が存在すると仮定する．

(I)　Δ は $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$; $c_1, c_2, \cdots, c_n$; $\cdots$ など，各未知数，n 個の係数 n 組，すなわち合わせて n^2 個の文字の整式で，各組の文字に関して斉次一次式である．

（II） もしも，任意の二組の文字が同一の n 個の値でおき換えられるならば $\varDelta$ は常に 0 になる．

$\varDelta$ が n^2 個の変数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$; $c_1, c_2, \cdots, c_n$; $\cdots$ の函数であることを示すために，それを次のようにしるす．

$$\varDelta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix} \qquad (3)$$

これは函数記法であって，ただ n^2 個の変数を一行に並べる代わりに，$\varDelta$ の特異な性質に適応するように，n 組の変数を n 列にしるしたまでである．

いましばらくこのような整式 $\varDelta$ が存在すると仮定するならば，それを用いて連立一次方程式（2）から未知数の中の任意の一つを残して，その他を消去することができる．それは二元の場合とまったく同様である．

$\varDelta$ は第一縦列の文字に関して斉次一次式であるから，

$$\varDelta=\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

と書けば，上の 4°）を $\varDelta$ に適用することができる．

さて $\varDelta$ の第一縦列を一次式 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ でおき換えるならば，4°）によって

$$\varphi(f_1, f_2, \cdots, f_n)=x\cdot\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n)+y\cdot\varphi(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$
$$+z\cdot\varphi(c_1, c_2, \cdots, c_n)+\cdots+\varphi(k_1, k_2, \cdots, k_n).$$

すなわち

$$\varDelta\begin{pmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ f_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}=x\cdot\varDelta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}+y\cdot\varDelta\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ b_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}$$

$$+z\cdot\Delta\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ c_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}+\cdots+\Delta\begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}.$$

しかるに Δ に関する仮定（II）によって右辺において第一項と最後の項とのほかは全部0になる．ゆえに

$$\Delta\begin{pmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ f_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}=x\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}.$$

ここまでは式の変形であって，この最後の等式は $x, y, z, \cdots$ の値のいかんにかかわらず，常に成り立つものである．

さてもし $x, y, z\cdots$ が方程式（2）を満足させるならば， $f_1, f_2, \cdots, f_n$ は0になるから，上の等式の左辺は0になる（1°）参照）．したがって

$$x\cdot\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}=0.$$

よって

$$x=-\Delta\begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ k_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}\Bigg/\Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}.$$

もし Δ の第二縦列を $f_1, f_2, \cdots, f_n$ でおき換えて，同様の計算を行なうならば

$$y=-\Delta\begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & k_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & k_n & c_n & \cdot \end{pmatrix} \Big/ \Delta\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot \end{pmatrix}$$

を得る．その他の未知数についても同様である．すなわち各未知数の値を与える式の分母はいずれも（3）の式で，分子は（3）において未知数の係数を示す文字を既知項 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ をおき換えたものである．すなわち二元一次方程式の場合とまったく同様である．

以上の結果は Δ なる整式の存在を仮定して得られたものであるが，次にこのような Δ が実際存在することを証明し，かつその組立てを説明するであろう．Δ がすなわち行列式である．

§ 44. 行列式の定義

前節では（Ⅰ）（Ⅱ）の性質をもつ整式 Δ の存在を仮定したのであるが，いまこのような整式が果たして実際存在するかどうかの問題を解決せねばならない．前の通り n 組の変数は相異なる n 個の文字 $a, b, c, \cdots, l$ で表わし，各組における n 個の変数はその文字に $1, 2, \cdots, n$ なる番号をつけて区別することにする．

さて（Ⅰ）によって Δ は各組の変数に関して斉次一次式であるべきであるから，Δ の各項は $a, b, c, \cdots, l$ なる文字を一つずつ含まねばならない．すなわち Δ は $a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots l_\lambda$ のような積にある係数を掛けた項の和でなければならない．すなわち

$$\Delta=\sum C\, a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots l_\lambda. \tag{1}$$

ただし $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ は各々 1 ないし n の番号を示すのである．

さて（Ⅱ）の条件から生ずる結果を考察するために，n 種の文字の中の任意の二つ，たとえば a, b に関して Δ の項を括って，次のようにしるす．

$$\Delta=P_{11}a_1b_1+P_{12}a_1b_2+P_{21}a_2b_1+\cdots+P_{\alpha\alpha}a_\alpha b_\alpha+P_{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta+P_{\beta\alpha}a_\beta b_\alpha+\cdots$$

ここで係数Pは a,b 以外の文字 $c,\cdots,l$ のみを含むものである．（Ⅱ）によれば，$a_1=b_1, a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$ とするとき，$\varDelta$ は0になるから，

$$0=P_{11}a_1{}^2+(P_{12}+P_{21})a_1a_2+\cdots+P_{\alpha\alpha}a_\alpha{}^2+(P_{\alpha\beta}+P_{\beta\alpha})a_\alpha a_\beta+\cdots.$$

しかもこれは $a_1,a_2,\cdots,a_n$ に関して恒等式であることを要するのであるから

$$P_{\alpha\alpha}=0,\ \ P_{\alpha\beta}+P_{\beta\alpha}=0 \quad すなわち \quad P_{\beta\alpha}=-P_{\alpha\beta}. \qquad (\alpha\neq\beta)$$

$P_{\alpha\alpha}=0$ は $a_\alpha b_\alpha c_\gamma\cdots l_\lambda$ のように2種の文字 a,b に同一の番号のついているような項が $\varDelta$ の中に含まれていてはならないことを示すものである．それは任意の二つの文字に関して，そうあらねばならないのであるから，実際$\varDelta$を組立てている項は（1）において $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda$ なる番号がみな相異なるもののみで，すなわち $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda$ は $1,2,3,\cdots,n$ の順列でなければならない．

次に $P_{\beta\alpha}=-P_{\alpha\beta}$ は

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots l_\lambda, \qquad a_\beta b_\alpha c_\gamma\cdots l_\lambda$$

のように，二つの文字 a,b の番号だけが互換されている二つの項は符号だけの異なる係数をもたねばならないことを示す．それは任意の二つの文字に関してそうなるのであるから，いま $\varDelta$ が

$$Ca_1b_2c_3\cdots l_n$$

なる項を含むとすれば，この項から二つの番号の互換を偶数回行なって得られる項の係数はすべて $+C$ で，互換を奇数回行なって得られる項の係数はすべて $-C$ でなければならない．ゆえに結局 $\varDelta$は次のような形をもたねばならない．

$$\varDelta=C\sum\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots l_\lambda$$

ここで $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda$ は $1,2,3,\cdots,n$ の順列で，$\pm$ はその順列が偶類であるか奇類であるかにしたがって $+$ または $-$ である（§ 30）．

$\varDelta$が前節（Ⅰ）（Ⅱ）の二つの性質を備える以上，その形は上の通りでなければならないのであるが，逆に上の$\varDelta$は実際（Ⅰ），（Ⅱ）の性質をもつことは明白である．まず（Ⅰ）については論はない．また$\varDelta$において二つの文字たとえば a,b の番号だけが互換されている項

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots l_\lambda, \qquad a_\beta b_\alpha c_\gamma\cdots l_\lambda$$

は反対の符号をもつから $a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$ とするとき，二つずつ消し合って，Δ は0になる．a, b の代わりに任意の二つの文字を取っても同様である．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix}$$

係数 C は随意であるが，それを1としたものがすなわち行列式で，それを左のようにしるす．

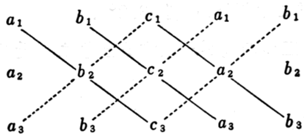
これを n 次の**行列式**といい，$a_1, \cdots, l_n$ なる n^2 個の文字をその**組成分子**という．

また左の上から右の下への対角線（第一対角線という）の上にある組成分子の積である $a_1b_2c_3\cdots l_n$ を行列式の**首項**という．

たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

上の三次行列式の展開を記憶するには，次のように行列式の三縦列に第一列と第二列とを添えてしるし，実線上にある左上から右下への三文字の積には符号 $+$ をつけ，破線上にある左下から右上への3文字の積には $-$ 符号をつけるようにするがよい．



一次の行列式 $|a|$ とは a それ自身をいう．

§ 45. 行列式の性質

1. 本節では行列式の最も卑近な二，三の性質について述べる．

〔**定理 8.1**〕 行列式のある列の各文字に同一の乗数 t を掛けるときは，行列式にその乗数が掛けられる．

〔注意〕 縦列を単に**列**という．また横列を**行**ということにする．

〔**証**〕 たとえば第一列（の各文字）に t を掛けるならば

$$\begin{vmatrix} a_1t & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2t & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nt & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix}$$

これは行列式が第一列の文字に関して斉次一次であるからである（§ 43, 3°）.

〔**定理** 8.2〕 行列式のある列の各文字が同数の文字の和であるときには，行列式は和の各項をその列においた行列式の和に等しい.

〔**証**〕たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1'+a_1'' & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2+a_2'+a_2'' & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+a_n'+a_n'' & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2' & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n' & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2'' & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n'' & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix}$$

これも斉次一次式の性質にすぎない（§ 43, 2°）.

〔**定理** 8.3〕 行列式の二つの列が一致するときは，その行列式は 0 に等しい.

これは前節に出ている.

〔**定理** 8.4〕 行列式のある列の各文字に同一の乗数を掛けて，それを他の列の同位置の文字に加えても行列式の値は変わらない.

〔**証**〕 たとえば第2列に t を掛けて第1列に加える（標語的に略言する，以下同様）ならば

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1t & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2+b_2t & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+b_nt & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & \cdot & l_1 \\ b_2 & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} \cdot t \quad \text{（定理 8.2）}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} \qquad \text{(定理 8.3)}$$

二つ以上の列にそれぞれの乗数を掛けて他の列に加えても，同様である.

〔**定理** 8.5〕 行列式において二つの列を互換すれば，行列式の値は符号だけが変わる.

〔**証**〕 第1列，第2列を互換するとして，次のように証明をする.

$$0=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ a_2+b_2 & a_2+b_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+b_n & a_n+b_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} \qquad \text{(定理 8.3)}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_n+b_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_n+b_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} \qquad \text{(定理 8.2)}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & \cdot & l_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \cdot & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_n & c_n & \cdot & l_n \end{vmatrix} \qquad \text{(定理 8.4)}$$

〔**定理** 8.6〕 行列式の列を任意の順序におき換えるとき，その順列が偶順列ならば行列式の値は変わらず，奇順列ならば，符号だけが変わる.

〔**証**〕 定理 8.5 の応用. 互換の回数によって二つの場合が生ずるのである.

2. 行列式に関して一般論をするには，組成分子を同一の文字に二つの番号をつけて次のように表わすのが便利である.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

すなわち a_{pq} は第 p 行，第 q 列の交叉点にある組成分子を示すのである．Leibniz が初めて行列式を発見したときに，すでにこのような記法を用いている．

この記法によれば行列式の展開は次のようになる．

$$D=\sum \pm a_{\alpha 1}a_{\beta 2}a_{\gamma 3}\cdots a_{\lambda n} \qquad (1)$$

$a_{\alpha 1}, a_{\beta 2}, a_{\gamma 3}, \cdots, a_{\lambda n}$ はすなわち §44 の $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, \cdots, l_\lambda$ に当たるのである．

この展開において各項の第二番号は自然の順序 $123\cdots n$ で，第一番号 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ の順列の類によって符号±を定めるのである．いま $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ および $\alpha'\beta'\gamma'\cdots\lambda'$ を $123\cdots n$ の任意の二つの順列とするとき，Dは

$$\pm a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}a_{\gamma\gamma'}\cdots a_{\lambda\lambda'} \qquad (2)$$

のような項を含む．実際これは各列から一つずつ，各行から一つずつの n 個の組成分子の積である．さてこの積につけるべき符号 ± はどうか．

この問題は定理 8.6 によって容易に解決される．

いま D の列の順序を変えて $\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \lambda'$ の列をそれぞれ $1, 2, 3, \cdots, n$ の位置において，その行列式を D' とする．すなわち

$$D'=\begin{vmatrix} a_{1\alpha'} & a_{1\beta'} & a_{1\gamma'} & \cdot & a_{1\lambda'} \\ a_{2\alpha'} & a_{2\beta'} & a_{2\gamma'} & \cdot & a_{2\lambda'} \\ a_{3\alpha'} & a_{2\beta'} & a_{2\gamma'} & \cdot & a_{3\lambda'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha'} & a_{n\beta'} & a_{n\gamma'} & \cdot & a_{n\lambda'} \end{vmatrix}$$

しからば，定理 8.6 によって

$$D'=\varepsilon' D,$$

ただし $\varepsilon'=\pm 1$ で，$\alpha'\beta'\gamma'\cdots\lambda'$ が偶順列ならば＋，奇順列ならば − である．

さて D' においては（2）は第1列から α 位，第2列から β 位，…，第 n 列から λ 位の文字を取って作った項であるから，その符号を $\varepsilon=\pm 1$ とすれば，±

は順列 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ の類に従うものである. ゆえに原行列式 D においては (2) の符号 ± は

$$\varepsilon\varepsilon'$$

である. すなわち $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ と $\alpha'\beta'\gamma'\cdots\lambda'$ とが同種の順列ならば +, 異種の順列ならば − である.

特に第一番号が自然の順列に並べられているときには, 第二番号の順列の種類に従って, その項の符号が定まる. よって行列式 D を次のように展開することができる.

$$D=\sum\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}\cdots a_{n\lambda} \qquad (3)$$

和はもちろん $n!$ 個の順列 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ の上にわたり, 各項の符号±は順列 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ の種類に従う. 偶類ならば +, 奇類ならば − である.

よって次の定理を得る.

〔**定理** 8.7〕 行列式の行と列とを転置しても, 行列式の値は変わらない.

転置とは行と列との交換, すなわち第1列, 第2列, …, 第 n 列の文字をそれぞれ第1行, 第2行, …, 第 n 行におくのをいう.

〔**証**〕 原行列式を (1) によって展開し, 転置後の行列式を (3) によって展開すれば, 項が一つ一つ同じになる.

よって定理 8.1〜8.6 において列に関して述べたことは, 行に関しても当てはまる.

§ 46. 余因子, 小行列式

1. n 次の行列式 D を前節に述べた一般的記法で表わすことにする. D はその任意の行, たとえば第 p 行, の文字に関して斉次一次式であるから, それを次のようにしるすことができるであろう.

$$D=\sum_{\sigma=1}^{n}a_{p\sigma}A_{p\sigma}.$$

あるいは第 q 列に関しては

$$D=\sum_{\sigma=1}^{n} a_{\sigma q} A_{\sigma q}.$$

A_{pq} は D における a_{pq} の係数である．それを a_{pq} の**余因子**という．

a_{11} の余因子 A_{11} は容易に求められる．D の項のうち a_{11} を因子とするものだけの総和は

$$\sum \pm a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\lambda}$$

である．符号 $\pm$ は順列 $1\beta\gamma\cdots\lambda$ の種類によって定められる．すなわちこの順列の中に含まれる番号の順位の反転の数が偶数であるかまたは奇数であるかにしたがって $+$ または $-$ である（§30）．この順位の反転は第一位にある1からは起こらないから，上の和を

$$a_{11} \sum \pm a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\lambda}$$

としるせば $\sum$ は $2,3,\cdots,n$ なる $n-1$ 個の番号の $(n-1)!$ 個の順列 $\beta\gamma\cdots\lambda$ の上にわたり，符号 $\pm$ は順列 $\beta\gamma\cdots\lambda$ の中の順位反転の数によって定まるものである．よって

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で，すなわち A_{11} は D において第1行と第1列とを除き去った $n-1$ 次の行列式に等しい．

このようにある行列式からある行と列とを除き去るとき，残りの組成分子をそのまま取って作られる低次の行列式を原行列式の**小行列式**という．

一般に a_{pq} の余因子を求めるために，D の行および列の順序を変えて，D の第 p 行を第1行におき，次に第 q 列を第1列においてその他の行および列は自然の順序のままにしておくならば，このようにして生ずる行列式を D' とするとき，

$$D'=\begin{vmatrix} a_{pq} & a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \overset{(q)}{*} & \cdot & a_{pn} \\ a_{1q} & a_{11} & a_{12} & \cdot & * & \cdot & a_{1n} \\ a_{2q} & a_{21} & a_{22} & \cdot & * & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot \\ a_{nq} & a_{n1} & a_{n2} & \cdot & * & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (p)$$

＊＊＊は第 p 行と第 q 列との文字が原位置にないことの心覚えにしるしておいたのである．

しからば

$$D'=\pm D. \tag{1}$$

さて D' においては a_{pq} が第1行，第1列の位置にあるから，D' における a_{pq} の余因子は D' の第1行と第1列とを取り去った跡の小行列式に等しい．この小行列式は D において第 p 行と第 q 列とを取り去った跡の小行列式にほかならない．この小行列式は D' における a_{pq} の係数であるから，D における a_{pq} の余因子はこの小行列式に（1）における符号 $\pm$ をつけたものに等しい．

さて（1）における符号 $\pm$ は定理8.6によって行および列の順列

$$\overset{(p\text{なし})}{p,1,2,\cdots*\cdots n} \qquad \overset{(q\text{なし})}{q,1,2,\cdots*\cdots n}$$

における順位反転の総数が偶数であるか，奇数であるかによって＋または－である．行の順列における順位の反転は p とそれよりも小さい $1,2,\cdots,p-1$ との間だけにあり，列の順列では q と $1,2,\cdots,q-1$ との間だけにある．その総数は $(p-1)+(q-1)$ であるから，（1）における $\pm$ に $(-1)^{p-1+q-1}$ すなわち

$$(-1)^{p+q}$$

に等しい．

よって次の定理を得る．

〔**定理** 8.8〕　行列式 D における a_{pq} の余因子を A_{pq} とすれば，A_{pq} は D から第 p 行と第 q 列とを取り去った跡に残る小行列式に $(-1)^{p+q}$ を掛けたも

のである.

$$
A_{pq}=(-1)^{p+q}\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ (p) \\ \\ \end{array}
\quad (\text{列の区切りが } (q))
$$

第 p 行と第 q 列とを消してしまうことを心覚えにしるしておいた. 符号 $(-1)^{p+q}$ が大切である.

2. いまDの第p行の各文字に他の行, たとえば第p'行の同位の文字の余因子を掛けて

$$\sum_{\sigma=1}^{n} a_{p\sigma}A_{p'\sigma}$$

のような和を作ったとすればどうか. それは明らかに D の第 p' 行を第p行でおき換えた行列式の展開である. この行列式は第p行と第 p' 行とが一致するから0に等しい. ゆえに

$$\sum_{\sigma=1}^{n} a_{p\sigma}A_{p'\sigma}=0 \qquad (p\neq p')$$

同様に, 列に関しても

$$\sum_{\sigma=1}^{n} a_{\sigma q}A_{\sigma q'}=0 \qquad (q\neq q')$$

D の小行列式の間にはこのような関係が成り立つのである.

定理8.8を用いれば, 行列式の値の計算が低次の行列式の計算に帰する. 特別な場合には, 定理8.1〜8.7を併用して計算の手数を節約することもできる.

〔例〕
$$
\begin{vmatrix} 9 & 17 & 13 & 4 \\ 18 & 33 & 28 & 8 \\ 30 & 54 & 40 & 13 \\ 24 & 46 & 37 & 11 \end{vmatrix}
$$
行列式の第4列に 2,4,3 を掛けて第 1, 2,3 列から引く (定理8.4).

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$ 第2列を第1列, 第3列から引き, 第2列に4を掛けて第4列から引く.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ 第1行に関して展開する. 符号 − に注意.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ 第1行に2を掛けて第2行から引く.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ 第1列に関して展開する.

$$= - \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-21+6) = 15.$$

〔問題 1〕

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdot & \cdot & x_n{}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdot & \cdot & x_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n).$$

これを Vandermonde の行列式という.

〔解〕 x_p, x_q を互換すれば, 行列式は符号だけを変えるから, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の交代式である. ゆえに $(x_1-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_n)\times C$ に等しい. 次数を比較すれば C は定数, したがって $x_1{}^{n-1}x_2{}^{n-2}\cdots x_{n-1}$ の係数を比較すれば, $C=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

〔問題 2〕

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1{}^{k-1} & x_2{}^{k-1} & \cdot & \cdot & x_n{}^{k-1} \\ x_1{}^{k+1} & x_2{}^{k+1} & \cdot & \cdot & x_n{}^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1{}^n & x_2{}^n & \cdot & \cdot & x_n{}^n \end{vmatrix} = P\times\sum x_1x_2\cdots x_{n-k}.$$

P は問題1の行列式, $\sum$ は対称式である.

〔解〕 上の行列式を Δ_k としるせば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x & x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^k & x_1{}^k & x_2{}^k & \cdot & \cdot & x_n{}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & x_1{}^n & x_2{}^n & \cdot & \cdot & x_n{}^n \end{vmatrix} = \Delta_0 - x\Delta_1 + x^2\Delta_2 + \cdots + (-1)^k x^k \Delta_k + \cdots + (-1)^n x^n \Delta_n$$
$$= (-1)^n P \times (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

x^k の係数を比較して Δ_k を得る.

〔問題 3〕

$$\begin{vmatrix} x_1{}^\alpha & x_2{}^\alpha & \cdot & x_n{}^\alpha \\ x_1{}^\beta & x_2{}^\beta & \cdot & x_n{}^\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1{}^\lambda & x_2{}^\lambda & \cdot & x_n{}^\lambda \end{vmatrix} = P \times \begin{vmatrix} H_\alpha & H_{\alpha-1} & \cdot & H_{\alpha-n+1} \\ H_\beta & H_{\beta-1} & \cdot & H_{\beta-n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_\lambda & H_{\lambda-1} & \cdot & H_{\lambda-n+1} \end{vmatrix}.$$

ただし H_k は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する k 式の斉次積の和を表わす. ただし $H_0 = 1, H_{-1} = H_{-2} = \cdots = 0$ とする. 特に $\alpha=0, \beta=1, \cdots, \kappa=n-2, \lambda=n-1+k$ (行列式 P において最後の行だけの指数を k だけ増す) ならば, $P \times H_k$ に等しい.

〔解〕

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{t_1-x_1} & \frac{1}{t_1-x_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{t_1-x_n} \\ \frac{1}{t_2-x_1} & \frac{1}{t_2-x_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{t_2-x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{1}{t_n-x_1} & \frac{1}{t_n-x_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{t_n-x_n} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P(t_1, t_2, \cdots, t_n) P(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\prod_{p,q}(t_p - x_q)}$$

を用いる. 行列式に $\Pi(t_p - x_q)$ を掛けて分母を払えば $P(t_1, t_2, \cdots, t_n) \times P(x_1, x_2, \cdots x_n) \times C$ を得る, C は定数である. $t_1 = x_1, t_2 = x_2, \cdots, t_n = x_n$ とおけば $f'(x_1) f'(x_2) \cdots f'(x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P(x_1, x_2, \cdots, x_n)^2$ から $C = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ を得る. ただし $f(t) = (t-x_1) \times (t-x_2) \cdots (t-x_n)$. さて

$$\frac{1}{t-x} = \frac{1}{t} + \frac{x}{t^2} + \frac{x^2}{t^3} + \cdots$$

を用いて, 行列式を展開すれば $1/t_1{}^{\alpha+1} t_2{}^{\beta+1} \cdots t_n{}^{\lambda+1}$ の係数はすなわち問題の行列式である. また右辺では, $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ の行と列とを転置して, 第 1,2,… 行を $\prod_q (t_1 - x_q)$, $\prod_q (t_2 - x_q)$, で割ってから,

$$\frac{1}{(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)} = \frac{1}{t^n} + \frac{H_1}{t^{n+1}} + \frac{H_2}{t^{n+2}} + \cdots$$

を用いて

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{vmatrix} \frac{1}{t_1{}^n}+\frac{H_1}{t_1{}^{n+1}}+\cdots, & \frac{1}{t_1{}^{n-1}}+\frac{H_1}{t_1{}^n}+\cdots, & \cdot\cdot\frac{1}{t_1}+\frac{H_1}{t_1{}^2}+\cdots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \end{vmatrix}$$

これから $1/t_1{}^{\alpha+1}t_2{}^{\beta+1}\cdots t_n{}^{\lambda+1}$ の係数を求めて問題の等式の右辺を得る.

〔**問題 4**〕

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdot & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdot & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdot & x_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & x_0 \end{vmatrix} = \Pi(x_0+\omega x_1+\omega^2 x_2+\cdots+\omega^{n-1}x_{n-1}).$$

右辺のΠは 1 の n 乗根 ω ($\omega=1$ をも入れて) に関する積を示す.

これを循環行列式という.

〔解〕 第 $2, 3, \cdots, n$ 列に $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ を掛けて第 1 列に加える.

〔注意〕 $n=3$ のとき, 左辺を展開すれば,

$$x_0{}^3+x_1{}^3+x_2{}^3-3x_0x_1x_2=(x_0+x_1+x_2)(x_0+\omega x_1+\omega^2 x_2)(x_0+\omega^2 x_1+\omega x_2).$$

§ 47.　連立一次方程式の解, Cramer の公式

1.　連立一次方程式の解法に関しては §43 で述べたのであったが問題はまだ完全に解決されていないのである.

本節では n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む n 個の一次方程式を次の形にしるす.

$$f_p=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q+\cdots+a_{pn}x_n+a_p=0. \qquad (1)$$
$$(p=1, 2, \cdots, n)$$

f_p は方程式の左辺の一次式を表わす記号で, a_{pq} は f_p における x_q の係数である. すなわち a_{pq} において第一の番号 p は方程式の番号で, 第二の番号 q は未知数の番号である. また f_p における既知項はただ一つの番号を用いて a_p としたのである.

未知数の係数を組成分子とする行列式を D とする. すなわち

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

（1）を解くには n 個の方程式に適当な因数を掛けて加えて $n-1$ 個の未知数を消去する．換言すれば $f_1,f_2,\cdots,f_n$ に関する斎次一次式を作って，それが $x_1,x_2,\cdots,x_n$ のうちただ一つだけを含むようなものを得ようとするのである．行列式を用いるならば，そのような一次式は容易に得られる．

D の第 q 列を一次式 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ でおき換えて

$$F_q\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & f_1 & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & f_2 & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & f_n & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (q=1,2,\cdots,n)$$

とおけば，それらが所要のものである．f_p は $n+1$ 項の和であるから，定理 8.2 によって F_q は $n+1$ 個の行列式の和に等しい．それらの行列式のうち二つのほかは定理 8.3 によって 0 に等しく，結局

$$F_q=Dx_q+D_q \tag{3}$$

を得る．D_q は D における第 q 列を既知項 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ でおき換えたものである．すなわち

$$D_q=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_1 & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_2 & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_n & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

（3）は $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関して恒等式である．いまもし $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を（1）の解とするならば，すなわち $f_1=f_2=\cdots=f_n=0$ とするならば，

$$F_q=0 \qquad (q=1,2\cdots,n)$$

になる．よって（3）から $D\neq0$ なる仮定のもとにおいて

$$x_q=-\frac{D_q}{D},\ (q=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

を得る．これが **Cramer の公式**である．

2. 以上はすでに §43 で述べたことである．さて上の考察によれば，（1）に解があるものと仮定するならば，その解は $F_q=0$ $(q=1,2,\cdots,n)$ をも満足させ，したがって $D\neq 0$ という仮定のもとにおいて解は（5）によって与えられることが知られたのである．すなわち（5）以外に解があり得ないことはわかったのであるけれども，（5）そのものが果たして実際（1）を満足させるかどうかは，まだ解決されていない．これは逆命題である．§43 ではこの論点に触れなかったから，いまその補いをしなければならない．

$$\begin{vmatrix} f_p & a_{p1} & a_{p2} & \cdot & a_{pn} \\ f_1 & a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ f_2 & a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

（5）が解であることを確かめるには（5）の x_q に a_{pq} を掛けて $\sum_{q=1}^{n}a_{pq}x_q+a_p$ なる和が 0 に等しいことを見ればよい．この計算を手短かにするのに，左のような行列式を使う．第 p 行を二度書いておくのである．

これを第一行に関して展開すれば

$$Df_p-a_{p1}F_1-a_{p2}F_2-\cdots-a_{pn}F_p=0.$$

まず第一項 Df_p は論はない．次に a_{p1} の余因子は符号をしばらく考えないならば，D の第1列を含まないで，その代わりに $f_1,f_2,\cdots,f_p$ を一つの列として含むものであるから，前掲の F_1 に等しい．すなわち第二項は $\pm a_{p1}F_1$ である．

第三項以下も同様である．符号 $\pm$ は実際みな $-$ になるのであるが，いま差し当たって符号を決定する必要はない．要するに

$$Df_p\pm a_{p1}F_1\pm a_{p2}F_2\pm\cdots\pm a_{pn}F_n=0$$

のような恒等式が成り立つのである．

さて $x_1,x_2,\cdots,x_n$ が（5）の値をもつならば，$F_1=F_2=\cdots=F_n=0$ になるから，上の恒等式から $Df_p=0$ を得る．ゆえに $D\neq 0$ という仮定のもとにおいて $f_p=0$ $(p=1,2,\cdots,n)$ を得るのである．

上の証明は二段に分かれている．第一段は

$$f_1=f_2=\cdots=f_n=0 \text{ ならば，} F_1=F_2=\cdots=F_n=0.$$

第二段は

$$F_1=F_2=\cdots F_n=0,\ D\neq0 \text{ ならば，} f_1=f_2=\cdots=f_n=0.$$

ここに至って Cramer の公式が確定したのである．

3.　特に $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ である場合，すなわち斉次一次方程式

$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n=0 \qquad (6)$$
$$(p=1,2,\cdots,n)$$

においては，D_q の第 q 列は全部 0 であるから，$D_q=0$ $(q=1,2,\cdots,n)$．したがって $D\neq0$ なる仮定のもとにおいては解は $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ だけである．対偶をいえば次の定理を得る．

〔**定理** 8.9〕　n 個の未知数を含む n 個の斉次一次方程式（6）が $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外の解をもつならば

$$D=0.$$

これはしばしば引用される定理である．

§ 48.　行　列　の　位

1.　一次方程式論を続ける前に，**行列の位**（rank，**階数**ともいう）について説明する必要がある．

行列とは若干行，若干列に数を配置したもので行と列との数 m，n は任意である．たとえば次の通り．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

括弧はこの配置にまとまりをつけるためにしるしたまでで，行列式の記法における縦線が函数記号の代用であるのとは違う．通常は括弧（　）を用いる．また近時は ‖　‖ も用いられる．本書では，印刷の便宜上，上のような括弧を用いてみたのであるが，場合に応じて混用する．

さて行列（1）から任意にk行，k列を取って，それらが交叉するところに配置されているk^2個の組成分子をそっくり，そのまま取って作られる行列式を行列（1）の中のk次の行列式という．

このような行列式は$k=1,2,3,\cdots$に対して（もちろん$k\leqq m$，$k\leqq n$）はなはだ多数生ずるが，それらの行列式でr次のものの中には0に等しくないものがあって，rよりも高次のものは全部0に等しいときに，rを行列の位というのである．すなわち位は行列中の0に等しくない行列式の最大次数である．

上の，位の定義においてrよりも高次の行列式は全部0に等しいといったけれども，$r+1$次の行列式が全部0に等しければよいのである．$r+1$次の行列式が全部0に等しいならば，$r+2$次の行列式は定理8.8によって0に等しく，したがって$r+3,\cdots$次の行列式もまた0に等しいからである．

2.　次に述べる定理は位の定義から直ちに出て来る．

1)　行列の行または列の順序を変えても，または行と列とを転置しても位は変わらない．

2)　行列のある行または列の各組成分子に0でない一定の乗数を掛けても，位は変わらない．

3)　行または列を添加して行列を拡張するときは，位は高くはなっても低くはならない．

新たに0に等しくない行列式が生じ得るからである．

4)　行列のある列に一定の乗数を掛けて，それを他の列に加えても位は変わらない．

たとえば行列（1）の第2列にtを掛けて，第1列に加えて，行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ta_{12} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}+ta_{22} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+ta_{m2} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

を作るとする．いま(1),(2)の位をr,r'として,(2)から$r+1$次の行列式を作れば，それが第1列を含まないか，または第1列と同時に第2列をも含む

ならば，すでに（1）に含まれている行列式に等しいから，仮定によって0に等しい．また第1列を含んで，第2列を含まないならば，それは0に等しい二つの行列式の和に等しいから，やはり0に等しい．このように（2）に含まれる $r+1$ 次の行列式が全部0に等しいから，(2)の位 r' は r 以下である．$r'\leqq r$．しかるに（2）の第2列に $-t$ を掛けて第1列に加えるならば（1）が得られるのであるから，同じ理由によって $r\leqq r'$．ゆえに $r=r'$．

この定理を反復応用すれば，行列の任意数の列にそれぞれ一定の乗数を掛けて他の列に加えても，位が変わらないことがわかる．

列の代わりに行を取っても同様である．

3. 行列の若干列（または行）の各組成分子にそれぞれ一定の乗数を掛けて各列における同位置のものを加え合わせたものを略して，それらの列の一次的結合という．たとえば

$$\begin{gathered}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\cdots+\lambda_k a_{1k}\\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_k a_{2k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1 a_{m1}+\lambda_2 a_{m2}+\cdots+\lambda_k a_{mk}\end{gathered}$$

は行列（1）の第1ないし k 列の一次的結合である．

〔**定理** 8.10〕 行列にその列の一次的結合を一つの列として添加しても，位は変わらない．ゆえにまた行列のある列が他の列の一次的結合であるときに，その列を取り去っても，位は変わらない．

〔**証**〕 4）と同様．

〔定理 8.11〕 行列の位が r ならば，その r 個の列〔行〕から0に等しくない r 次の行列式を作り得るのであるが，その他の列〔行〕はこれらの r 列〔行〕の一次的結合に等しい．

〔**証**〕 1) によって0に等しくない r 次の行列式は第1ないし r の行と列とから作られたものと仮定してさしつかえない．よって

$$A_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

とする．

いま ρ および σ を r よりも大きい番号とすれば，$r+1$ 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} & a_{1\sigma} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} & a_{2\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} & a_{r\sigma} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdot & a_{\rho r} & a_{\rho\sigma} \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

さて $A_r\neq 0$ であるから，Cramer の公式によって

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\cdots+a_{1r}\lambda_r+a_{1\sigma}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\lambda_1+a_{r2}\lambda_2+\cdots+a_{rr}\lambda_r+a_{r\sigma}=0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

なる $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ が求められる．これらの乗数を（4）の第1ないし r 列に掛けて最後の列に加えるならば，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} & 0 \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdot & a_{\rho r} & a'_{\rho\sigma} \end{vmatrix}=0.$$

を得る．ただし，

$$a'_{\rho\sigma}=a_{\rho 1}\lambda_1+a_{\rho 2}\lambda_2+\cdots+a_{\rho r}\lambda_r+a_{\rho\sigma}.$$

よって

$$A_r a'_{\rho\sigma}=0.$$

$A_r\neq 0$ だから

$$a'_{\rho\sigma}=0.$$

すなわち（4）における最終列は第1ないしr列の一次的結合である．（4）におけるρを$r+1, r+2, \cdots, m$に換えても，乗数λは（5）からきめられるのであるから，（1）における第σ列は第1ないしr列の一次的結合に等しい．σを$r+1$，$r+2, \cdots, n$のどれとしても同様であるから，証は終わる．

〔**定理 8.12**〕　行列中のr次のある行列式が0に等しくなくて，それを含んだ$r+1$次の行列式が全部0に等しいときには，行列の位はrである．

〔注意〕　r次の行列式$A_r \neq 0$とすれば，行列の位はもちろんr以上である．位がrであるのには，$r+1$次の行列式が全部0に等しいことを要するが，それらの行列式の中で，A_rを含んだものだけが0に等しいならば，それで十分であるというのが定理の趣意である．$r+1$次の行列式はその数がはなはだ多いが，その中の一小部分なるA_rを含むものだけが0に等しいならば，全部が0に等しいというのであるから，この定理は行列の位を定めるのに有効な方法を示すものといわねばならない．たとえば$m=n=5$で$r=3$ならば4次の行列式の総数は25であるが，A_rを含むものは4である．

〔**証**〕　A_rは前掲（3）の通りとすれば，仮定によって（4）のような行列式が全部0であるから，定理8.11の証明と同様に，原行列の第$r+1, \cdots, n$列は第1ないしr列の一次的結合である．よって原行列の位はその$r+1$以上の列を取り去っても変わらない（定理8.10）．すなわち位はrである．

§ 49.　連立一次方程式の解，斉次の場合

1.　n個の未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$を含むm個の斉次一次方程式

$$f_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \qquad (1)$$
$$(p=1, 2, \cdots, m)$$

が与えられたとき，そのすべての解を求めること．この問題を解決する鍵は係数の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の位である．いまその位をrとする．方程式の番号または未知数の番号を変更してもさしつかえないから，

$$A_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．しからば行列 A の第 $r+1$ 以下の行は初めの r 行の一次的結合である（定理 8.11）から，$\rho>r$ とすれば

$$f_\rho=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_rf_r$$

のような恒等式が成り立つ．したがって $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_r=0$ であるときには，当然 $f_{r+1}=0, \cdots, f_m=0$ になる．ゆえに（1）の解は r 個の方程式

$$\left.\begin{array}{c} f_p=a_{p1}x_1+\cdots+a_{pr}x_r+(a_{p,\,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{p,\,n}x_n)=0 \\ (p=1, 2, \cdots, r) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

から求められるのである．$A_r\neq0$ であるから，（2）の解は

$$x_k=-\frac{A_k}{A_r} \qquad (k=1, 2, \cdots, r)$$

によって与えられる．ここで §47,（5）の既知項に相当するものは

$$a_{p,\,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{p,\,n}x_n \qquad (4)$$

で，A_k は A_r においてその第 k 列を（4）の数でおき換えた r 次の行列式である．ゆえに（3）が次のようにしるされる．

$$x_k=-\frac{A_{k,\,r+1}}{A_r}x_{r+1}-\frac{A_{k,\,r+2}}{A_r}x_{r+2}-\cdots-\frac{A_{k,\,n}}{A_r}x_n, \qquad (3^*)$$

$$(k=1, 2, \cdots, r)$$

ただし $A_{k,\sigma}$ は A_r における第 k 列を $a_{1,\sigma}a_{2,\sigma}\cdots, a_{r,\sigma}$ でおき換えた行列式である（余因子ではない）．すなわち

$$A_{k,\sigma}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \overset{k}{a_{1\sigma}} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & \cdot & a_{2\sigma} & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & a_{r\sigma} & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}$$

§47 で述べたように，（2）が成り立つときには（3*）が成り立ち，逆に（3*）が成り立つときには（2）が成り立つのであるから，（2）したがって（1）の解は（3*）によって与えられるのである．すなわち $x_{r+1}, \cdots, x_n$ には

任意の値を与えて(3*)によって $x_1, x_2, \cdots, x_r$ を求めるならば, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のそれらの値は(1)を満足させ, また逆に(1)を満足させる $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値は, すべてこのようにして得られるのである.

2. 斉次一次方程式(1)の一つの解を

$$x_1 = x_1^{(1)},\ x_2 = x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n = x_n^{(1)} \tag{5}$$

とすれば, λ を任意の乗数として

$$x_1 = \lambda x_1^{(1)},\ x_2 = \lambda x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n = \lambda x_n^{(1)}$$

なる解が得られる. これは斉次一次式の性質によって明白である(§43, 3°).

また(1)が

$$x_1 = x_1^{(2)},\ x_2 = x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n = x_n^{(2)} \tag{6}$$

なる第二の解をもつならば, (5), (6)なる二つの解の一次的結合である

$$x_1 = \lambda x_1^{(1)} + \mu x_1^{(2)},\ x_2 = \lambda x_2^{(1)} + \mu x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n = \lambda x_n^{(1)} + \mu x_n^{(2)}$$

もまた(1)の解である(§43, 4°).

一般に, (1)の h 組の解

$$x_1 = x_1^{(\nu)},\ x_2 = x_2^{(\nu)},\ \cdots,\ x_n = x_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, h)$$

が得られたとすれば, 任意の乗数を以て作られるそれらの解の一次的結合である.

$$x_1 = \sum_{\nu=1}^{h} \lambda^{(\nu)} x_1^{(\nu)},\ x_2 = \sum_{\nu=1}^{h} \lambda^{(\nu)} x_2^{(\nu)},\ \cdots,\ x_n = \sum_{\nu=1}^{h} \lambda^{(\nu)} x_n^{(\nu)}$$

はまた(1)の解である.

よって(1)の解が幾組か得られたときに, それらの解のうちどれもが他の解の一次的結合に等しくないときに限って, それらを**互いに独立なる解**と名づける. しからば(1)のすべての解を求めることは, すべての互いに独立な解を求めることに帰する.

h 組の解が互いに独立な解であるというのは, それらの解が作る行列

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdot & \cdot & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdot & \cdot & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(h)} & x_2^{(h)} & \cdot & \cdot & x_n^{(h)} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

の位が h に等しいことにほかならない（定理 8.11).

しかるに（3*）によれば, これらの解における $x_1, x_2, \cdots, x_r$ の値は $x_{r+1}, \cdots, x_n$ の値にそれぞれ一定の乗数を掛けた積の和に等しい. すなわち行列（7）において, 第1ないし r 列はその他の $n-r$ 列の一次的結合である. ゆえに（7）の位を見るには, その最初の r 列を取り去ってよいから, 終りの $n-r$ 列から決定される. したがって（7）の位は $n-r$ より大きくはあり得ない. 互いに独立な解は多くとも $n-r$ 組である.

さて互いに独立な解が実際 $n-r$ 組あることは見やすい. たとえば $x_{r+1}, \cdots, x_n$ に次のような $n-r$ 組の値を与える.

x_{r+1}	x_{r+2}	x_{r+3}	$\cdot$	x_n
1	0	0	$\cdot$	0
0	1	0	$\cdot$	0
0	0	1	$\cdot$	0
0	0	0	$\cdot$	1

これらの値に対応する $n-r$ 組の解は互いに独立である. 念のためにそれらの解をしるせば次の通り

（$A_{1,r+1}\cdots, A_{r,n}$ は 239 頁に示してある. 余因子ではない）

	$x_1,$	$x_2,$	$\cdots\cdots$	$x_r,$	$x_{r+1},$	$x_{r+2},$	$\cdot\ \cdot$	x_n
1)	$-\dfrac{A_{1,r+1}}{A_r},$	$-\dfrac{A_{2,r+1}}{A_r},$	$\cdot\ \cdot$	$-\dfrac{A_{r,r+1}}{A_r},$	1,	0,	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	0
2)	$-\dfrac{A_{1,r+2}}{A_r},$	$-\dfrac{A_{2,r+2}}{A_r},$	$\cdot\ \cdot$	$-\dfrac{A_{r,r+2}}{A_r},$	0,	1,	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	0
$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-r$)	$-\dfrac{A_{1,n}}{A_r},$	$-\dfrac{A_{2,n}}{A_r},$	$\cdot\ \cdot$	$-\dfrac{A_{r,n}}{A_r},$	0,	0,	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	1

これらは互いに独立な $n-r$ 組の解の一例にすぎない.

一般に $x_{r+1},\cdots,x_n$ に $n-r$ 組の値を与えて，それらの値からの $n-r$ 次の行列式が0に等しくないようにするならば，それらの値を（3*）に代入して $x_1,x_2,\cdots,x_r$ の値を求めるとき，互いに独立な $n-r$ 組の解が得られる．しからば，すべての解はこれらの互いに独立な解の一次的結合として得られるのである.

以上を要約して次の定理とする.

〔定理 8.13〕 **n 個の未知数を含める斉次一次方程式の係数の行列の位が r ならば，未知数のうち，$n-r$ を適当に選んで，それらに任意の値を与えて他の未知数の値を求めることを得る．互いに独立な解が $n-r$ 組あって，すべての解はそれらの一次的結合として得られる.**

$r=n$ である場合には，解は $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ に限る.

§ 50.　連立一次方程式の解，一般の場合

最後に連立一次方程式の最も一般な場合を論ずる．すなわち n 個の未知数を含む m 個の一次方程式

$$f_p=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n+a_p=0 \qquad (1)$$
$$(p=1,2,\cdots,m)$$

のすべての解を求めることが問題である.

この場合には，未知数の係数の行列 A と，それに既知項 $a_1,\cdots,a_m$ を一列として追加した行列 B とを考察する必要がある.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} & a_m \end{pmatrix}$$

まず（1）が解をもつと仮定すれば，その解を（1）の左辺に代入して B の最後の列は初めの n 列の一次的結合であることがわかる．したがって B の位は A の位に等しい（定理 8.10）．これが（1）に解があるための必要条件で

ある．

さて，これがまた十分な条件である．いま A と B との位が r であるとして

$$A_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定する．

しからば，行列 B の第 $r+1$ 行以下は第1ないし r 行の一次的結合である．したがって $f_{r+1},\cdots,f_n$ は $f_1,f_2,\cdots,f_r$ の一次的結合であるから，(1) の解は

$$f_1=0, f_2=0, \cdots, f_r=0 \tag{2}$$

から求められる．(2) は Cramer の公式によって解くことができる．すなわち

$$x_k=-\frac{1}{A_r}\left(\sum_{\sigma=r+1}^{n} A_{k,\sigma}x_\sigma+A_{k,0}\right) \tag{3}$$

$$(k=1,2,\cdots,r)$$

$A_{k,r}$ は239頁と同様で，A_r の第 k 列を $a_{1\sigma},a_{2\sigma},\cdots,a_{r\sigma}$ でおき換えた行列式で，$A_{k,0}$ は A_r の第 k 列を既知項 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ でおき換えた行列式を表わすのである．すなわち

$$A_{k,0}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \overset{k}{a_1} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & a_2 & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & a_r & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}$$

$x_{r+1},\cdots,x_n$ に任意の値を与えて，(3) によって $x_1,x_2,\cdots,x_r$ を求めるならば，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ が (1) の解である．のみならず，(1) の解はすべてこのようにして求められるのである．

特に

$$x_1=-\frac{A_{1,0}}{A_r},\ x_2=-\frac{A_{2,0}}{A_r},\cdots,x_r=-\frac{A_{r,0}}{A_r},x_{r+1}=0,\cdots,x_n=0$$

が一つの特別な解で，その他の解は $a_1=a_2=\cdots=a_r=0$ とおいて得られる斉次一次方程式の任意の解をそれに加えたものである．

〔定理 8.14〕　連立一次方程式（1）に解があるために必要かつ十分な条件は，行列 A, B の位が相等しいことである．

この位を r とすれば，（1）の解はその中の適当な r 個の方程式から求められる．適当に選ばれた $n-r$ の未知数に任意の値を与えるとき，その他の未知数の値が定まる．

$r=n$ ならば解はただ一組に限る．

これによって連立一次方程式の最も一般な場合の解法が完了したのである．解の有無を決定するものは，係数（および既知項）の行列の位である．連立一次方程式を初めから方程式と未知数とが同数である場合に限定するいわれはない．また方程式の数と未知数の数との大小のみによって解の有無を決定しようというのは．概括的の一般論である．また解が無数に存在するとき，それを不定の場合と名づけるだけで片づけてしまうのは粗雑である．不定といっても，すべての未知数に随意の値を与えて方程式が満足されるのではない．解が無数に存在しても解は全体として定め得るのである．

〔問題 1〕　n 個の変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関する m 個の斉次一次式

$$f_k=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

が変数 (x) に適当な値を与えることによって，任意の与えられた値を取り得るときに，それらを互いに独立であるという．そのために必要かつ十分な条件は，係数の行列の位が m に等しいことである．

〔解〕　$u_1,u_2,\cdots,u_m$ を任意に与えて，方程式 $f_1=u_1,\cdots,f_m=u_m$ に解があるかないかを見ればよい．

〔問題 2〕　n 個の未知数を含む n 個の斉次一次方程式

$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n=0 \qquad (p=1,2,\cdots,n)$$

の位（係数の行列の位）が $n-1$ で，たとえば最初の $n-1$ 行から0に等しくない行列式が作られるとすれば，解は第 n 行の余因子によって与えられる．

$$x_1=\lambda A_{n1},x_2=\lambda A_{n2},\cdots,x_n=\lambda A_{nn}.$$

この場合, 独立な解はただ一つだから, 次の定理が得られる.

〔**問題 3**〕 n 次の行列式が 0 に等しいとき, その位が $n-1$ ならば, 各行〔または各列〕の余因子は互いに比例する. または全部 0 に等しい.

〔**問題 4**〕 n 個の未知数を含む斉次一次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{1n}x_n=0, \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{rn}x_n=0 \end{array}\right\}$$

の位が $r\,(r<n)$ であるとき, 係数の行列に $n-r$ 個の行を添えて

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

とし, Dにおける a_{pq} の余因子を A_{pq} とすれば

$$\left.\begin{array}{ccccc} A_{r+1,1} & A_{r+1,2} & \cdot & \cdot & A_{r+1,n} \\ A_{r+2,1} & A_{r+2,2} & \cdot & \cdot & A_{r+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdot & \cdot & A_{n,n} \end{array}\right\}$$

は $n-r$ 個の互いに独立な解である.

〔解〕 これが原方程式の解であることは代入して見れば明白である. さてこれらの解の間に

$$\begin{array}{l} \lambda_1 A_{r+1,1}+\lambda_2 A_{r+2,1}+\cdots+\lambda_{n-r}A_{n,1}=0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_1 A_{r+1,n}+\lambda_2 A_{r+2,n}+\cdots+\lambda_{n-r}A_{n,n}=0 \end{array}$$

のような関係があるとすれば, $a_{r+1,1}, a_{r+1,2}, \cdots, a_{r+1,n}$ を掛けて加え

$$\lambda_1 D=0$$

を得る. $D\neq 0$ だから, $\lambda_1=0$. 同様に $\lambda_2=0, \cdots, \lambda_{n-r}=0$. ゆえに上の解は互いに独立である (定理 8.19 参照).

上の D のように 0 に等しくない行列式が作られることは見やすい. たとえば初めの r 行から 0 に等しくない一つの行列式を取り, それに入らない $n-r$ 個の列がそれぞれ $r+1, r+2, \cdots, n$ なる行に交叉するところに 1 をおいて, その他は 0 で埋める.

〔**問題 5**〕 §50,（1）の連立一次方程式において，s 組の解

$$x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, \cdots, x_n^{(\sigma)} \quad (\sigma=1,2,\cdots,s)$$

が得られたとき，$p_1+p_2+\cdots+p_s=1$ なる乗数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ を以て作られる，それらの解の一次的結合

$$x_1=p_1x_1^{(1)}+p_2x_1^{(2)}+\cdots+p_sx_1^{(s)},$$

$$x_2=p_1x_2^{(1)}+p_2x_2^{(2)}+\cdots+p_sx_2^{(s)}, \cdots$$

が，やはり解である．このような解は前の s 組の解から独立でないという．しからば，方程式（1）の位が r ならば，$n-r+1$ 組の独立な解があって，一般の解は，上の方法によって，これらの解の一次的結合として得られる．

〔解〕 不斉次な方程式（1）の解は，一組の解に，（1）の既知項を0でおき換えて得られる斉次一次方程式の解を加えて得られる．この注意を用いて，容易に解かれる．

§ 51.　基本定理の拡張

1.　行列式の一般論に返って，Laplace の展開と行列式の掛け算とを説明するのであるが，それらを統一的に取り扱うために，まず次の問題を解こう．行列式の定義を引き出すために，§44 で解いた問題を次のように拡張することができる．

各組 n ずつ m 組すなわち合わせて mn の変数 $a_{\mu\nu}$ を m 行に並べて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

とする．これらの mn 個の変数の整式 Φ を次の条件によって決定しよう．

（I）Φ は（1）の各行の文字に関して斉次一次式である．

（II）（1）の任意の2行が一致するとき，Φ は0になる．

これがいま解こうとする問題である．

§44 で解いたのは $m=n$ なる特別の場合である．ただし §44 では各組の変数を列にしるしたのであるが，ここでは，記法の便宜上，各組の変数を行にしるすことにする．

2.　まず $m=2$ のときに二組の変数を

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

とするならば，（Ⅰ）によって

$$\Phi = P_{11}x_1y_1 + P_{12}x_1y_2 + P_{21}x_2y_1 + \cdots$$
$$+ P_{\alpha\alpha}x_\alpha y_\alpha + P_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta + P_{\beta\alpha}x_\beta y_\alpha + \cdots. \tag{3}$$

また（II）によって

$$0 = P_{11}x_1{}^2 + (P_{12} + P_{21})x_1x_2 + \cdots$$
$$+ P_{\alpha\alpha}x^2{}_\alpha + (P_{\alpha\beta} + P_{\beta\alpha})x_\alpha x_\beta + \cdots.$$

これは $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する恒等式であるべきであるから

$$P_{\alpha\alpha} = 0. \qquad P_{\beta\alpha} = -P_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

ゆえに

$$\Phi = P_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + P_{\alpha\beta}(x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha) + \cdots.$$

$P_{\alpha\beta}$ が任意の定数であるとき，このような Φ が（Ⅰ），（II）の条件を満たすことは明らかである．

すなわち問題は，$m=2\,(n \geqq 2)$ のときには，解けたのである．

3. さて，mの一般の値に対して，上の問題を解くのに，この結果を応用することができる．（2）の二組の変数が行列（1）の任意の2行を代表するものと見れば，いま求めつつあるところの Φ は（4）の条件を満たさねばならない．ただしこの場合は，$P_{\alpha\beta}$ は（2）によって代表された行列（1）の2行以外の行に属する文字のみを含むものである．

さて Φ は（Ⅰ）によって，行列（1）の各行の文字に関して斉次一次式であるから

$$Ca_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{m\mu} \tag{5}$$

のような項の和でなければならないが，（4）の等式 $P_{\alpha\alpha}=0$ は，（5）において第二番号の中に相等しいもののあるような項は Φ の中には含まれない（すなわちその係数Cが0である）ことを示す．

しかるに $m>n$ ならば，$1, 2, \cdots, n$ である番号からm個の相異なるものを取り得ないから，$\Phi=0$.

また $m=n$ ならば，行列（1）は方形である．その行列式を D とすれば，

$$\Phi=cD$$

でなければならないことは，§44に述べた通りである．ここで c は任意の定数である．

残るのは $m<n$ の場合である．この場合には

$$\Phi=\sum Ca_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{m\mu}$$

において，$\alpha,\beta,\cdots,\mu$ は $1,2,\cdots,n$ の中の相異なる m 個の番号である．さて n 個の番号 $1,2,\cdots,n$ の中から m 個の番号を選び出す仕方は

$$\nu=\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

だけあるが，これら ν 組の組合せに属する m 個の番号を $m!$ の順序に並べ得るから，全体において $(\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\mu)$ の取り得る値は

$$\nu\times m!$$

だけあって，Φ はこれだけの項を含み得るのである．

これらの項を ν 組の組合せに応じて，ν 個の部分に分けて

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_\nu$$

とおくことができる．すなわち Φ_k は同一の組合せ $(\alpha,\beta,\cdots,\mu)$ に対応する $m!$ 項の和を表わすのである．たとえば，Φ_1 は $(1,2,\cdots,m)$ なる組合せに対応するとすれば，

$$\Phi_1=\sum C\,a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{m\mu}$$

において $\alpha,\beta,\cdots,\mu$ は $1,2,\cdots,m$ の順列である．

いま Φ_1 を求めるために，行列（1）にしるした n 列の文字の中で，第 $1,2,\cdots,m$ 列だけを残して，その他の列の文字には0なる値を与えたと想像せよ．しからば $\Phi_2,\Phi_3,\cdots,\Phi_\nu$ の各項は，いずれも第 $1,2,\cdots,m$ 列以外のある列の文字を含まねばならないから，みな0になってしまう．ゆえにこのとき $\Phi=\Phi_1$ になる．すなわち函数記号を用いるならば

$$\Phi_1=\Phi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2m} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mm} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ゆえに Φ_1 は各行 m ずつの文字

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{7}$$

のみを含む整式であるが，Φ_1 はこれら m 行の文字の整式として上の（I），（II）の二条件を満たすものであることは明らかである．実際，（6）の右辺を見れば，（I）によってそれは $a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pm}$ に関して斉次一次であり，また（II）によって

$$a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pm},\ 0, 0, \cdots 0 \qquad a_{p'1}, a_{p'}, \cdots, a_{p'm}, 0, 0, \cdots 0$$

なる2組が一致するとき，すなわち（7）の2行が一致するとき，0 になる．

このように Φ_1 は（7）の m 行の文字の整式で，それらの m 組に関して（I），（II）の条件を満たすものであるから

$$\Phi_1=c_1D_1$$

でなければならない．ここに D_1 と書いたのは（7）の行列式で，c_1 は任意の定数である．

$\Phi_2, \Phi_3, \cdots, \Phi_\nu$ も同様である．いま Φ_k は（1）における第 $p, q, \cdots, s$ 列に関する和とすれば，Φ_k は

$$\begin{pmatrix} a_{1p} & a_{1q} & \cdot & \cdot & a_{1s} \\ a_{2p} & a_{2q} & \cdot & \cdot & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mp} & a_{mq} & \cdot & \cdot & a_{ms} \end{pmatrix} \tag{8}$$

に関して（I），（II）の条件を満たすもので，したがって

$$\Phi_k=c_kD_k$$

でなければならない．D_k はすなわち上の（8）の行列式で，c_k は定数である．

ゆえに

$$\Phi=c_1D_1+c_2D_2+\cdots+c_\nu D_\nu.$$

$D_1, D_2, \cdots, D_\nu$ は行列（1）から m ずつの列を取って作られる m 次の行列式で $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ は任意の定数である．

逆に，このような整式 Φ が（I），（II）の条件を満たすことは明白である．

以上の説明を総合して次の定理を得る．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

〔**定理** 8.15〕 右にしるすように m 行 n 列に排列された変数の整式 Φ が

（I） 各行の変数に関して斉次一次式であり，

（II） 任意の2行が一致するとき 0 になるならば，

1°） $m>n$ のとき，$\Phi=0$.

2°） $m=n$ のとき，$\Phi=cD$.

ただし D はこの場合方形である上の行列の行列式で，c は任意の定数．

3°） $m<n$ のとき，$\Phi=c_1D_1+c_2D_2+\cdots+c_\nu D_\nu$.

ただし $D_1, D_2, \cdots, D_\nu$ は上の行列から m 列ずつを取って作られる

$$\nu=\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\,!}$$

個の行列式で，$c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ は任意の定数である．

〔注意〕 2°）は 3°）の特別の場合である．$\nu=\binom{n}{m}=1$. 1°）はまた 2°）の若干列を 0 でおき換えることによっても得られる．

§ 52. Laplace の定理

1. n 次の行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

から r 行（$r<n, n=r+s$）を取り出して，その番号を $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ とする．D において，これらの r 行の文字のみを変数と見て，その他の行の文字を定数として取り扱うならば，D はこれらの r 行の文字についてもとより斎次一次であり，またこれらの r 行の中，任意の2行がまったく同一になれば，D は0になるから，定理8.15の第三の場合を適用することができる．よって D を

$$D=c_1D_1+c_2D_2+\cdots+c_\nu D_\nu \tag{1}$$

のような形に書き表わすことができる．ここで，$D_1,D_2,\cdots,D_\nu$ はもとの行列式の $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ なる r 行から r 列ずつを取って作られる $\nu=\binom{n}{r}$ 個の r 次の小行列式で，$c_1,c_2,\cdots,c_\nu$ はこれらの r 行の文字を含まない係数であるから，この場合には，他の s 行の文字のみを含むものである．いまこれらの r 次の小行列式の中で $\alpha',\beta',\cdots,\lambda'$ なる r 列から作ったものを

$$D\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \cdots, & \lambda\\ \alpha', & \beta', & \cdots, & \lambda'\end{pmatrix}$$

で表わす．すなわち括弧の中の上の方に書いたのが D における行の番号で，下の方に書いたのが列の番号である．上の展開式において，この小行列式に掛かる係数をこの小行列式の余因子（adjunct）という．それを

$$\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}$$

で表わすことにすれば，上の展開式は次のようになる．

$$D=\sum_{(\alpha'\beta'\cdots\lambda')}D\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}\times\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix} \tag{2}$$

この和は $1,2,\cdots,n$ の中から選ばれる r ずつの番号の $\binom{n}{r}$ 個の組合せに関するものである．そこで任意の小行列式の余因子を求める必要が生ずる．

2. この問題は定理8.8の展開の拡張である．あそこでした通り，まず最も簡単な場合として

$$\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}1\ 2\cdots r\\ 1\ 2\cdots r\end{pmatrix}$$

を求める．いま上の展開式（1）で，$\alpha=1,\beta=2,\cdots,\lambda=r$ として

$$D_1=D\begin{pmatrix}1\ 2\cdots r\\ 1\ 2\cdots r\end{pmatrix}$$

とすれば，求めるべきものは c_1 であるが，それには D の初めの r 行の文字に適当な特別の値を与えて，その場合における（1）の両辺の値を比較するがよい．その特別の値は次のようにする．

$$
\begin{array}{r}
 \\
1) \\
2) \\
3) \\
\cdot \\
\cdot \\
r)
\end{array}
\begin{pmatrix}
\overset{1}{1} & \overset{2}{0} & \overset{3}{0} & \cdot & \cdot & \overset{r}{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \overset{n}{0} \\
0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0
\end{pmatrix}
$$

すなわち第一行では，第一の文字を1としてその他はみな0にし，第二行では，第二の文字を1として，その他はみな0，順次そのようにして，第 r 行では，第 r 番の文字を1にして，その他はみな0にするのである．そうすれば，D_1 はもとより1になるが，$D_2, \cdots, D_\nu$ は0ばかりの列を必ず含むことになるから，みな0になり，したがって（1）の右辺は c_1 になる．また左辺は

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & & \cdot & \cdot & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & & \cdot & a_{r+1,n} \\
a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & & \cdot & \cdot & a_{r+2,r} & a_{r+2,r+1} & & \cdot & a_{r+2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & & \cdot & \cdot & a_{nr} & a_{n,r+1} & & \cdot & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

で，これは

$$
\begin{vmatrix}
a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+2} & \cdot & a_{r+1,n} \\
a_{r+2,r+1} & a_{r+2,r+2} & \cdot & a_{r+2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,r+1} & a_{n,r+2} & \cdot & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

に等しい．すなわち D の1ないし r の行および列を取り去って残りの s 行，s 列をそのままの順序においた行列からできる s 次の行列式である．これが c_1 で，すなわち

$$\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}1 & 2 \cdots r\\ 1 & 2 \cdots r\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}r+1, r+2, \cdots n\\ r+1, r+2, \cdots n\end{pmatrix}.$$

さて一般に任意の r 個の行と r 個の列とを取って，それを番号順に

$$\alpha<\beta<\cdots<\lambda, \qquad \alpha'<\beta'<\cdots<\lambda'$$

として

$$\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}\alpha & \beta \cdots \lambda\\ \alpha' & \beta' \cdots \lambda'\end{pmatrix}$$

を求めるために，残りの s 行および s 列をやはり番号順に

$$\rho<\sigma<\cdots<\tau, \qquad \rho'<\sigma'<\cdots<\tau'$$

で表わすことにする．いま行列式 D の行の順序と列の順序とを

$$\alpha,\ \beta,\ \cdots, \lambda \quad ; \quad \rho,\ \sigma,\ \cdots, \tau$$

$$\alpha', \beta', \cdots, \lambda' \quad ; \quad \rho', \sigma', \cdots, \tau'$$

に変えたものを D' とすれば，行の順列では α よりも小さい番号 $1, 2, \cdots, \alpha-1$ がみな α よりも後にあるから，それから $\alpha-1$ の転倒が生ずる．また β よりも小さい番号が $\beta-1$ だけあるうち α を除いたほかの $\beta-2$ は β の後にあるからそれから $\beta-2$ の転倒が生ずる．同じようにして λ よりも小さい番号が $\lambda-1$ だけある中で，$\lambda-1-(r-1)$ だけが λ よりも後にあるから，それから $\lambda-r$ の転倒が生ずる．$\rho, \sigma, \cdots, \tau$ は大きさの順序に並んでいるから転倒を含まない．ゆえに行の順列における転倒の総数は

$$(\alpha-1)+(\beta-2)+\cdots+(\lambda-r)=\alpha+\beta+\cdots+\lambda-(1+2+\cdots+r)$$

である．同じように，列の順列における転倒の総数は

$$\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda'-(1+2+\cdots+r)$$

である．ゆえに

$$D'=D\times(-1)^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda'}$$

である．$1+2+\cdots+r$ の2倍は偶数だから書かなくてもよい．

さて D' においては

$$D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$$

は初めの r 行と r 列とから作った小行列式になっているから，それに掛けるべき余因子は，それらの r 行 r 列を D' から取り去った跡に残る s 次の行列式であるが，それはすなわち

$$D\begin{pmatrix}\rho & \sigma & \cdots & \tau \\ \rho' & \sigma' & \cdots & \tau'\end{pmatrix}$$

にほかならない．よって D と D' との符号の関係を計算に入れて，D においては

$$\mathrm{Adj.}\, D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}=(-1)^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda'}D\begin{pmatrix}\rho & \sigma & \cdots & \tau \\ \rho' & \sigma' & \cdots & \tau'\end{pmatrix}.$$

よって次の定理を得る．

〔定理 8.16〕 Laplace の定理

$$D=\sum_{(\alpha'<\beta'<\cdots<\lambda')}(-1)^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda'}D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}\rho & \sigma & \cdots & \tau \\ \rho' & \sigma' & \cdots & \tau'\end{pmatrix}.$$

ただし $\alpha<\beta<\cdots<\lambda$ は一定の r 個の番号を大きさの順に並べたもの，$\rho<\sigma<\cdots<\tau$ はその残りの s 個の番号を大きさの順に並べたもので，また $\alpha'<\beta'<\cdots<\lambda'$ は $1,2,\cdots,n$ の中から大きさの順に選び出した任意の r 個の番号で，$\rho'<\sigma'<\cdots<\tau'$ はその残りの s 個の番号をやはり大きさの順に並べたものである．和 $\sum$ は $1,2,\cdots,n$ の中から r 個ずつの $\binom{n}{r}$ の組合せ $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ の全体にわたるのである．

上の

$$D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix},\qquad D\begin{pmatrix}\rho & \sigma & \cdots & \tau \\ \rho' & \sigma' & \cdots & \tau'\end{pmatrix}$$

のように D の小行列式と，それに含まれない残りの行と列とからできる小行列式とを互いに余行列式 (complementary minors) といい，それを comp. で表わすことにする．すなわち

$$D\begin{pmatrix}\rho & \sigma & \cdots & \tau \\ \rho' & \sigma' & \cdots & \tau'\end{pmatrix}=\mathrm{comp.}\, D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$$

ただし行の番号も大きさの順に並べてあるものとするのである．そうすると，余因数 Adj. と余行列式 comp. とは符号だけで違い得るので，その関係は次の通りである．

$$\mathrm{Adj.}\, D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}=\pm\ \mathrm{comp.}\, D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}.$$

$\pm$ は $(-1)^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda'}$.

この符号を記憶しやすくするために，D の小行列式の行も列も番号の大きさの順に並べることにして，その小行列式に含まれる行と列との番号の総和が奇数であるかまたは偶数であるかにしたがって，その小行列式を奇類小行列式または偶類小行列式ということにする（よって各小行列式とその余行列式とは同類である）．そうすれば，上の余因子と余行列式との符号の異同を示す $\pm$ は$D=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$ が偶類のとき＋，奇類のとき－ である．

3. Laplace の定理によって，行列式Dの小行列式の間に成り立つ多くの恒等式が得られる．いま $a<b<\cdots<l$ を $\alpha<\beta<\cdots<\lambda$ と異なる組合せとして（2）の右辺の $D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$ を $D\begin{pmatrix}a & b & \cdots & l \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$ に換え，Adj. $D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}$は元のままにして，

$$\sum_{(\alpha'\beta'\cdots\lambda')} D\begin{pmatrix}a & b & \cdots & l \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}=0.$$

なる和を作ったと考えるならば，それはもちろんDの展開ではない．それはDの中の $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ なる番号の行のところへ，それぞれ $a,b,\cdots,l$ なる番号の行を代入したときに生ずる行列式の展開である．しかるに，このような行列式は是非とも同じ行を重複して含むことになるから，0 である（この行列式は D の $a,b,\cdots,l,\rho,\sigma,\cdots,\tau$ なる番号の行から成り立ち，$(a,b,\cdots,l)$ と $(\rho,\sigma,\cdots,\tau)$ の中に同じ番号が必ずはいっていなければならない）．よって次の定理を得る．

〔**定理 8.17**〕 $a,b,\cdots,l$ を $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ と異なる組合せとすれば

$$\sum_{(\alpha'\beta'\cdots\lambda')}\begin{pmatrix}a & b & \cdots & l \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}\mathrm{Adj.}\,D\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda'\end{pmatrix}=0.$$

〔例 1〕

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2\end{vmatrix}.$$

〔例 2〕

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_3 & b_4 \\ c_3 & c_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & b_4 \\ c_2 & c_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_4 \\ c_1 & c_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_2 & a_4 \\ c_2 & c_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_3 & a_4 \\ c_3 & c_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=0.$$

〔問題 1〕

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

なる行列からの二次の行列式を

$$(\lambda\mu)=\begin{vmatrix} a_\lambda & a_\mu \\ b_\lambda & b_\mu \end{vmatrix}$$

で表わせば

$$(12)(34)+(13)(42)+(14)(23)=0.$$

〔解〕 $a_1a_2a_3a_4$ と $b_1b_2b_3b_4$ を第三行と第四行とにもおいて，四次の行列式を作れば，それは 0 に等しい．その行列式を第一行，第二行にしたがって展開すれば，上の等式を得る．第二項で（42）だけが番号順になっていないのは，第二項の符号を + にするためである．

特に $b_1=b_2=b_3=b_4=1$ とすれば

$$(a_1-a_2)(a_3-a_4)+(a_1-a_3)(a_4-a_2)+(a_1-a_4)(a_2-a_3)=0$$

を得る．

〔問題 2〕 $D=|a_{pq}|$ を n 次の行列式とし，$\alpha,\beta,\cdots,\lambda$; $\alpha'\beta',\cdots,\lambda'$ を $1,2,\cdots,n$ の中から r 個の二つの組合せとするとき，Dにおける

$$a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}\cdots a_{\lambda\lambda'}$$

の係数を求めること．ただし $\alpha\beta\cdots\lambda$ も $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ も必ずしも番号順に書いたのではない．

〔解〕 $1,2,\cdots,n$ から $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ を除いた残りを番号順に $\rho<\sigma<\cdots<\tau$ また $\alpha',\beta',\cdots\lambda'$ を除いた残りを番号順に $\rho'<\sigma'<\cdots<\tau'$ とし，かつ $\alpha\beta\cdots\lambda$ および $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ の中の順位転倒の数をそれぞれ I,I' とすれば，

$$(-1)^{I+I'+\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\alpha'+\beta'+\cdots\lambda'}D\begin{pmatrix}\rho\ \sigma\ \cdots\tau\\ \rho'\sigma'\cdots\tau'\end{pmatrix}$$

が求めるところの係数である．

〔問題 3〕

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdot & \cdot & v_n & w \end{vmatrix}=Aw-\sum A_{pq}u_pv_q\quad (p,q=1,2,\cdots,n)$$

ただし A は a なる文字の部分から作った n 次の行列式で，A_{pq} は A における a_{pq} の余因子である．$\sum$ は p, q に関してともに $1, 2, \cdots, n$ の上にわたるのである．

〔解〕 行列式を u, v, w なる文字の函数と見て同類項をまとめるのである．まず w の係数が A であることには論はない．また $u_p v_q$ の係数が $-A_{pq}$ であることは前の問題の応用である．

〔問題 4〕

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & u_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & u_{21} & u_{22} & \cdot & \cdot & u_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} & u_{n1} & u_{n2} & \cdot & \cdot & u_{nr} \\ v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & v_{1n} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & v_{2n} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdot & \cdot & v_{rn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix} = (-1)^r \sum_{\substack{(\alpha\beta\cdots\lambda) \\ (\alpha'\beta'\cdots\lambda')}} U_{\alpha\beta\cdots\lambda} V_{\alpha'\beta'\cdots\lambda'} \times \mathrm{Adj.}\, A\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots\lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots\lambda' \end{pmatrix} \quad (r \leqq n)$$

ただし $U_{\alpha\beta\cdots\lambda}$ は u なる文字の行列から $\alpha<\beta<\cdots<\lambda$ なる r 個の番号の行を取って作った r 次の行列式 $V_{\alpha'\beta'\cdots\lambda'}$ は v なる 文字の行列から $\alpha'<\beta'<\cdots<\lambda'$ なる r 個の番号の列を取って作った行列式で，Adj. は a なる文字の行列に関していう．また $\sum$ は$\binom{n}{r}\times\binom{n}{r}$の組合せ $(\alpha\beta\cdots\lambda)$，$(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ の上にわたるのである．

$r=n$ ならば，u なる文字の行列も v なる文字の行列も方形になる．それらの行列式を U, V とすれば，

$$\Delta=(-1)^n UV.$$

また $r>n$ ならば

$$\Delta=0.$$

〔解〕 Δ を最後の r 列に関して展開し，$U_{\alpha\beta\cdots\lambda}$ の余因数を再び最後の r 行に関して展開する．

§ 53. 行列の結合

1. 行列式の掛け算の起源は一次変形の結合にある.

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の一次形式として次のように表わされるとする.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

しからば $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の任意の函数 F において，上の $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の一次式を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に代入するとき，F は $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の函数として表わされるであろう．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を旧変数，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ を新変数と見なして，このような変形を一次変形という.

一次変形は最も簡単な，したがって最も有用な変形として数学の各部門において常に遭遇するから，はなはだ大切である.

上の一次変形を略して次のように見やすくしるす.

$$(x) = A(y).$$

(x)，(y) はそれぞれ n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ および $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を代表し，A は（1）の右辺における係数の行列を表わすのである．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

いま n 個の変数 (y) が第二の一次変形によって n 個の変数 (z) に換えられるとする．すなわち

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n, \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

あるいは略して

$$(y)=B(z)$$

$$B=[b_{pq}],\ (p,q=1,2,\cdots,n).$$

（2）から（1）の（y）に代入すれば，変数（x）は変数（z）の一次式として表わされ，（x）と（z）との間の一次変形が生ずる．その一次変形を

$$x_p=c_{p1}z_1+c_{p2}z_2+\cdots+c_{pn}z_n \qquad (3)$$

$$(p=1,2,\cdots,n)$$

で表わす．あるいは略して

$$(x)=C(z)$$

とおく．

このようにして生ずる一次変形（3）を一次変形（1）に一次変形（2）を結合したものという．あるいは一次変形の係数のみに着眼して，**行列Aに行列Bを結合**して**行列C**を得るという．式では

$$A\cdot B=C$$

と書く．さて C の組成分子 $c_{11},\cdots,c_{nn}$ を計算せねばならない．c_{pq} を出せばよいのであるが，c_{pq} は x_p を（z）の一次式として表わすときの z_q の係数であるから，上の代入を実行して

$$c_{pq}=\sum_{s=1}^{n}a_{ps}b_{sq} \qquad (p,q=1,2,\cdots,n).$$

すなわち c_{pq} は行列 A **の第 p 行**の組成分子 $a_{p1},a_{p2},\cdots,a_{pn}$ と行列B**の第 q 列**の組成分子 $b_{1q},b_{2q},\cdots,b_{nq}$ とを番号順に掛け合わせた積の和である．

このように，c_{pq} は第一の行列 A からは行の分子を取り，第二の行列 B からは列の分子を取って，上の操作によって作り出されるものであるから，行列 A,B の結合においては，それらの行列の順序が大切である．すなわち $A\cdot B$ と $B\cdot A$ とは同一の行列にはならない．それは一次変形の結合の意味から考えて当然である．要約すれば，行列の結合は一般には交換法則に従わない．

2. 行列の結合またはさかのぼって一次変形の結合は，上よりも広く考えることが出来る．

上記では三組の変数 (x), (y), (z), を各々 n 個ずつとしたのであったがいまその制限を撤回して, l 個の変数 (x) が m 個の変数 (y) の一次式として与えられ, それらの m 個の変数 (y) が n 個の変数 (z) の一次式として与えられたとしても, 上と同様の代入を行なえば, l 個の変数 (x) が結局 n 個の変数 (z) の一次式として表わされることに変りはない. この場合にも

$$(x)=A(y),\qquad A=[a_{\lambda,\mu}],\qquad (\lambda=1,2,\cdots,l;\mu=1,2,\cdots,m)$$

$$(y)=B(z),\qquad B=[b_{\mu,\nu}],\qquad (\mu=1,2,\cdots,m;\nu=1,2,\cdots,n)$$

として, 代入の結果を

$$(x)=C(z),\qquad C=[c_{\lambda,\nu}].\qquad (\lambda=1,2,\cdots,l;\nu=1,2,\cdots,n)$$

とすれば

$$c_{\lambda\nu}=\sum_{s=1}^{m}a_{\lambda s}b_{s\nu}.$$

このような場合にも, 行列 C を行列 A,B の結合という.

このときには, A の形は $(l\times m)$ すなわち行数 l, 列数 m で, B は $(m\times n)$ すなわち行数 m, 列数 n である. すなわち A の列数は B の行数に等しい. さもなければ, 結合は不可能である.

〔注意〕 一次変形 $(x)=A(y)$ において旧変数 (x) と新変数 (y) とが同数であるのが, 一般的である. かつ変数 (x) も (y) も独立変数であることが要求される場合 (それが一般的である) には, 行列式 $|a_{pq}|\neq 0$ なることを条件とする. これが一次変形の**正則の場合**である. $|a_{pq}|=0$ ならば, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の間に一次の関係式が生ずる, すなわち (1) の右辺の一次式が互いに独立でない.

けれども, 行列式が0になる場合をも, 変則の場合として一次変形の中へ入れておくのである. A において行数 m が列数 n よりも多いとき, すなわち変数 (x) の数が変数 (y) の数よりも多いときは, (y) の数を増して m にして, それらは (1) において係数0をもつものとし, また $m<n$ なるときは, (x) の数を増して, それらに代入すべき y の一次式において, すべての係数を0と見れば, すなわち行列 A に0のみの列または行を添えて正方形にすれば, 上の変則の場合になる.

§ 54. 行列式の掛け算

1. 前節で述べた行列の結合において, A,B がともに n 次の正方行列であ

る場合には，その結合である $C=A\cdot B$ も n 次の正方行列になる．これらの行列の行列式をそれぞれ $|A|$, $|B|$, $|C|$ としるせば

$$|C|=|A|\cdot|B|$$

になる．これは結合ではない．多項式乗法に関する恒等式である．本節では，それを証明するのであるが，前節で後に述べた一般の結合の場合をも考察する．A,B の結合が可能であるのは，その形が A は $l\times m$, B は $m\times n$ のようでなければならないのであるが，もし $l=n$ であるときには，結合の結果である C は n 次の正方行列になる．その行列式 $|C|$ と行列 A,B との関係はどうであるかという問題が生ずる．それを上の乗法定理と同時に解決することにする．

〔**定理** 8.18〕 A は m 行，n 列 $(m\times n)$，B は n 行，m 列 $(n\times m)$ の行列で，その結合を $C=A\cdot B$ とすれば，C は m 行 m 列 $(m\times m)$ である．しからば，C の行列式 $|C|$ に関して，次の等式が成り立つ．

1°)　$m=n$,　$|C|=|A|\cdot|B|$.

2°)　$m<n$,　$|C|=\sum_{s=1}^{\nu}A_sB_s$,　$\nu=\binom{n}{m}$.

3°)　$m>n$,　$|C|=0$.

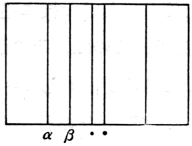
〔解説〕 記号の意味は次の通り．

1°)　では A も B も正方行列である．それらの行列式を $|A|$, $|B|$ で表わすのである．

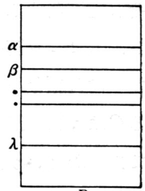
2°)　では行列 A から m 列を選び出す仕方が $\nu=\binom{n}{m}$ だけある．それらの組合せに，適宜第1番から第 ν 番までの番号をつける．その中の一つ，たとえば第 s 番は $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ であるとして，A におけるそれらの番号の列を第 $1,2,\cdots,m$ 列とする行列式を A_s で表わし，また行列 B においては同じく $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ なる番号の行を第 $1,2,\cdots,m$ 行とする行列式を B_s で表わすのである．B の形は $n\times m$ で，$m<n$ だから，B から m 行を選び出して，$\nu=\binom{n}{m}$ 個の行列式を作ることができる．それらの ν 個の行列式 B_1, $B_2,\cdots,R_\nu$ の番号を A からの ν 個の行列式 $A_1,A_2,\cdots A_\nu$ と同様につけるのである．すなわち，A_s と B_s とは A と B における同番号の列と行とを同一の順に並べて作った m 次の行列式である．詳しく書けば

$$A_s=\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m\lambda} \end{vmatrix} \qquad B_s=\begin{vmatrix} b_{\alpha 1} & b_{\alpha 2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{\alpha m} \\ b_{\beta 1} & b_{\beta 2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{\beta m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\lambda 1} & b_{\lambda 2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{\lambda m} \end{vmatrix}.$$

図のように $\alpha<\beta<\cdots<\lambda$ としなくてもよいけれども，そうきめてもさしつかえない．A_s と B_s において，列と行との順序を同じように変更しても積 $A_s B_s$ には変化はない．



A



B

3°）については解説はいるまい．

〔証〕 いろいろの証明法はあるが，ここでは定理 8.15 を応用する．

2°）の証明をすれば，その特別の場合（$m=n, \nu=1$）として 1°）が出る．また 1°）が証明されたとすれば，その特別の場合として 3°）が出る．1°）が m 次の行列式の場合に成り立つとしたときに，$n<m$ として，A の $n+1, n+2, \cdots, m$ 列の組成分子および B の $n+1, n+2, \cdots, m$ 行の組成分子を全部 0 にすれば，3°）が出て来るのである．

しかし念のために 1°）から始めて，$|C|$ を n^2 個の変数 $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ の多項式として考察する．$|C|$ の第 p 行の組成分子 $c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pn}$ は A の第 p 行の組成分子の斉次一次式である（§53）．

ゆえに $|C|$ は A の各行の組成分子に関して斉次一次式である．さて A の第 p 行と第 p' 行とが一致したとする．すなわち

$$a_{pq}=a_{p'q} \qquad (q=1,2,\cdots,n)$$

とする．

しからば

$$c_{pq}=c_{p'q} \qquad (q=1,2,\cdots,n)$$

したがって $|C|=0$ になる．

ゆえに定理 8.15（または行列式の定義）によって

$$|C|=k\cdot|A|. \tag{1}$$

k は $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ に関して定数である.

この定数因子 k を決定するために, $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ に特別な数値を与えて (1) の両辺を比較しよう. 最も便利なのは, A の第一対角線上の文字に数値 1 を与え, その他を 0 とするのであろう. そうすれば $|A|=1$ になる. そのとき c_{pq} はどうなるか.

$$c_{pq}=\sum_{s=1}^{n} a_{ps}b_{sq}$$

で, $a_{pp}=1, a_{ps}=0$ $(p \neq s)$ であるから,

$$c_{pq}=b_{pq}.$$

すなわち上の $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ の特別な値に対しては $|C|=|B|$ になる.

ゆえに (1) において,

$$k=|B|$$

したがって

$$|C|=|A|\cdot|B|.$$

すなわち 1°) である.

上の通り, 定理 8.15 を応用すれば 3°) の場合には, $|C|=0$ になる. また 2°) の場合には,

$$|C|=\sum_{s=1}^{\nu} k_s A_s. \tag{2}$$

ここでも k_s は定数 ($a_{11}, \cdots, a_{mn}$ に関しての定数) である. k_s を求めるのに, 前と同様に $a_{11}, \cdots, a_{mn}$ に特別な値を与える. すなわち

$$a_{1\alpha}=1, a_{2\beta}=1, \cdots, a_{m\lambda}=1$$

のほかは A の組成分子は全部 0 とする. しからば $A_q=1$ になるが, その他の $A_1, \cdots, A_\nu$ は全部が 0 という列を含むから, 0 になる (262 頁の図, 参照).

ゆえに, a なる文字のこのような特別の数値に対して

$$|C|=k_s$$

になるが, この場合 $|C|$ の数値を b で表わせば, どのようになるであろうか.

$$c_{1q}=\sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{sq}$$

であるが，$a_{1\alpha}=1$ のほかは $a_{11},\cdots,a_{1n}$ は全部0であるから，

$$c_{1q}=b_{\alpha q}. \quad (q=1,2,\cdots,m)$$

同様に

$$c_{2q}=\sum_{s=1}^{n} a_{2s}b_{sq}$$

で，$a_{2s}(s=1,2,\cdots,n)$ は $a_{2\beta}=1$ のほかは0であるから，

$$c_{2q}=b_{\beta q}. \quad (q=1,2,\cdots,m)$$

各行みな同様で，最終行（第m行）では，

$$c_{mq}=\sum_{s=1}^{n} a_{ms}b_{sq}=b_{\lambda q}.$$

ゆえに上の特別の数値に対しては $|C|=B_s$，したがって（2）において，$k_s=B_s$. ゆえに，

$$|C|=\sum_{s=1}^{\nu} A_sB_s.$$

すなわち 2°）が証明されたのである.

〔注意〕 上記では，行列式の掛け算の起源を示すために，行列の結合と連絡して述べたのである．単に行列式の積を行列式の形に表わすだけが目的ならば，両因数の行と行，列と列，または第一因数の列と第二因数の行とを組み合わせて上と同様の計算をして，もちろんさしつかえない.

2. 次に，行列式掛け算の応用問題二，三を掲げる.

〔問題1〕 $s_k=x_1{}^k+x_2{}^k+\cdots+x_n{}^k, \qquad (s_0=n),$

$$D_k=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdot & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdot & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \cdot & s_{2k-2} \end{vmatrix}$$

とすれば,

$$D_n=P(x_1,x_2,\cdots,x_n)^2,$$

$k<n$ ならば,

$$D_k=\sum P(x_\alpha,x_\beta,\cdots,x_\lambda)^2,$$

$k>n$ ならば,

$$D_k=0.$$

ただしPは Vandermonde の行列式である (§46, 問題 1). 第二の等式において, $\sum$ は $x_1,x_2,\cdots,x_n$ からの k 個の組合せ $x_\alpha,x_\beta,\cdots,x_\lambda$ の上にわたる.

〔解〕 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdot & \cdot & x_n^{k-1} \end{pmatrix}$ とその転置行列とを結合する.

〔問題 2〕 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2.$

〔解〕 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}$ とその転置行列との結合による.

特に $n=4$ のとき, $(12)(34)+(13)(42)+(14)(23)=0$ を用いて (256頁, 問題 1)

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$$
$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+\{(12)+(34)\}^2+\{(13)+(42)\}^2+\{(14)+(23)\}^2$$

を得る (§2. 問題 3).

〔問題 3〕 $(x_1,y_1),\cdots,(x_4,y_4)$ を円周上の 4 点の直角座標, d_{pq} をその相互の距離とすれば,

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

〔解〕 仮定によって

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

である．——仮りに x_1y_1 を流通座標と見れば，この方程式は円を表わし，その円は (x_2, y_2), (x_3, y_3) (x_4, y_4) を通る——この行列と

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & -2y_4 \\ x_1{}^2+y_1{}^2 & x_2{}^2+y_2{}^2 & x_3{}^2+y_3{}^2 & x_4{}^2+y_4{}^2 \end{vmatrix}$$

との結合から問題の等式を得る．

〔注意〕 問題の行列式を展開すれば

$d_{12}{}^4d_{34}{}^4+d_{13}{}^4d_{24}{}^4+d_{14}{}^4d_{23}{}^4-2d_{12}{}^2d_{13}{}^2d_{24}{}^2d_{34}{}^2-2d_{12}{}^2d_{14}{}^2d_{23}{}^2d_{34}{}^2-2d_{13}{}^2d_{14}{}^2d_{23}{}^2d_{24}{}^2=0$ を得る．左辺を因数に分解して

$$(d_{12}d_{34}+d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23})(-d_{12}d_{34}+d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23})(d_{12}d_{34}-d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23})$$
$$(d_{12}d_{34}+d_{13}d_{24}-d_{14}d_{23})=0$$

を得る．四つの点が相異なるとき，第二以下の因数の中，一つだけが0に等しい．どれが0に等しいかは，円周上における4点の排列による（Ptolemy の定理）．

〔**問題 4**〕 平面上の任意の4点の相互の距離の間には，次の関係が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}{}^2 & d_{13}{}^2 & d_{14}{}^2 \\ 1 & d_{21}{}^2 & 0 & d_{23}{}^2 & d_{24}{}^2 \\ 1 & d_{31}{}^2 & d_{32}{}^2 & 0 & d_{34}{}^2 \\ 1 & d_{41}{}^2 & d_{42}{}^2 & d_{43}{}^2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

〔解〕 前の問題の行列に第一行または第一列として 1, 0, 0, 0 と 0, 0, 0, 1 とを添えて結合すれば，問題の行列式を得る．それは定理8.18の 3°) によって0に等しい．

〔注意〕 球面上の五つの点または空間における任意の五つの点の相互の距離に関して問題3または問題4と同様の等式が成り立つ．

〔**問題 5**〕 $(x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_4, y_4, z_4)$ を空間における四つの点 A_1, A_2, A_3, A_4 の直角座標，Vを四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の体積とすれば

$$6V=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

〔解〕 上の行列式を Δ とする．Δ の第4行を各行から引けば，

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}.$$

この各行は平行移動によって原点を A_4 に移したときの A_1, A_2, A_3 の座標に等しい．よって

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

として $\frac{1}{6}|\varDelta|$ が四面体 $OA_1A_2A_3$ の体積に等しいことを示せばよい．同じ原点に関する他の直角座標 (x', y', z') に移れば，

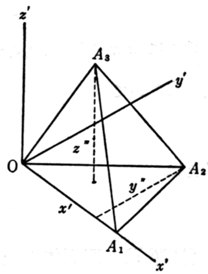
$$\begin{aligned} x&=\lambda\ x'+\mu y'\ +\nu z', \\ y&=\lambda' x'+\mu' y'+\nu' z', \\ z&=\lambda'' x'+\mu'' y'+\nu'' z', \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}=1.$$

ゆえに掛け算の定理によって

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}.$$

さて，OA_1 を x' 軸に取り，OA_1A_2 を $x'y'$ 平面に取り，しかも y' 軸の向きを $A_2(x'', y'', 0)$ において $y''>0$ になるように取るならば，

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x' & 0 & 0 \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=x'y''z'''$$



$x'y''$ は三角形 OA_1A_2 の面積の 2 倍に等しく，$|z'''|$ は A_3 から平面 OA_1A_2 すなわち $x'y'$ 平面への距離に等しい．ゆえに $|\varDelta|$ は四面体 $OA_1A_2A_3$ の体積の 6 倍に等しい．

〔**問題 6**〕　直交軸に関して四つの平面の方程式を

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0,$$

とすれば，これらの平面で囲まれる四面体の体積 V は絶対値において

$$\frac{1}{6}\ \frac{\varDelta^3}{D_1D_2D_3D_4}$$

に等しい．ただし

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

D_1, D_2, D_3, D_4 は $\varDelta$ における d_1, d_2, d_3, d_4 の余因子である．

〔解〕 四面体の頂点を $(x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_4, y_4, z_4)$ とする．ただし (x_1, y_1, z_1) は 2, 3, 4 の平面の交点で，その他もこれに準ずる．しからば，問題5によって絶対値では $6\varDelta V$ は

$$\varDelta\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{——} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{——} \end{vmatrix}$$

に等しい．さて $\varDelta$ において第1, 2, 3列に x_1, y_1, z_1 を掛けて最後の列に加えると

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

ゆえに $a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=\dfrac{\varDelta}{D_1}$, $a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2$, なども同様であるから，絶対値において

$$6\varDelta\cdot V=\frac{\varDelta}{D_1}\cdot\frac{\varDelta}{D_2}\cdot\frac{\varDelta}{D_3}\cdot\frac{\varDelta}{D_4}.$$

ゆえに

$$V=\frac{1}{6}\left|\frac{\varDelta^3}{D_1D_2D_3D_4}\right|.$$

〔問題 7〕 四面体の一つの頂点において交わる三つの稜の長さを a_1, a_2, a_3, それらに対する稜を b_1, b_2, b_3，体積を V とすれば

$$288V^2=\begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 1 \\ a_1^2 & 0 & b_3^2 & b_2^2 & 1 \\ a_2^2 & b_3^2 & 0 & b_1^2 & 1 \\ a_3^2 & b_2^2 & b_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

〔解〕 二つの四面体の頂点を $(x_1, y_1, z_1)\cdots$; $(x_1', y_1', z_1'), \cdots$ その体積を V, V' とすれ

ば

$$\pm 6V=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\pm 6V'=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & x_4' & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 0 & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 0 & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 0 & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

掛けて（行と行とを組み合わせて）

$$36VV'=\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & 1 \\ (21) & (22) & (23) & (24) & 1 \\ (31) & (32) & (33) & (34) & 1 \\ (41) & (42) & (43) & (44) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし$(pq)=x_px_q'+y_py_q'+z_qz_q'=\frac{1}{2}(x_p^2+y_p^2+z_p^2)+\frac{1}{2}(x_q'^2+y_q'^2+z_q'^2)-\frac{1}{2}d_{pq}^2$,
d_{pq} は (x_p, y_p, z_p) と (x_q', y_q', z_q') との距離である.

よって上の行列式の最後の列に $\frac{1}{2}(x_r^2+y_r^2+z_r^2)$ を掛けて第 r 列から引き，また最後の行に $\frac{1}{2}(x_r'^2+y_r'^2+z_r'^2)$ を掛けて第 r 行から引けば,

$$36VV'=-\begin{vmatrix} -\frac{d_{11}^2}{2} & -\frac{d_{12}^2}{2} & -\frac{d_{13}^2}{2} & -\frac{d_{14}^2}{2} & 1 \\ -\frac{d_{21}^2}{2} & -\frac{d_{22}^2}{2} & -\frac{d_{23}^2}{2} & -\frac{d_{24}^2}{2} & 1 \\ -\frac{d_{31}^2}{2} & -\frac{d_{32}^2}{2} & -\frac{d_{33}^2}{2} & -\frac{d_{34}^2}{2} & 1 \\ -\frac{d_{41}^2}{2} & -\frac{d_{42}^2}{2} & -\frac{d_{43}^2}{2} & -\frac{d_{44}^2}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

第 1, 2, 3, 4 行に -2 を掛けて後，第5列を -2 で割れば,

$$288VV'=\begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

もし二つの四面体が一致すれば，$d_{11}=d_{22}=d_{33}=d_{44}=0$．また $d_{12}=a_1, d_{13}=a_2, d_{14}=a_3$ とすれば，それらに対する稜は $d_{34}=b_1, d_{24}=b_2, a_{23}=b_3$ で，問題に掲げた等式を得る．

〔**問題** 8〕 四面体に関して，前の問題と同様の記号を用い，また四面体に外接する球の半径を R として，

$$2P=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

とおけば，

$$R^2=\frac{P(P-a_1b_1)(P-a_2b_2)(P-a_3b_3)}{36V^2}.$$

〔解〕 球の中心を原点として

$$\pm 6VR=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix}. \qquad \pm 6VR=-\begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix}$$

を掛け合わせ，$R^2=x_px_q+y_py_q+z_pz_q+\frac{1}{2}d_{pq}{}^2$ を用いて

$$36\times 16V^2R^2=-\begin{vmatrix} 0 & a_1{}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 \\ a_1{}^2 & 0 & b_3{}^2 & b_2{}^2 \\ a_2{}^2 & b_3{}^2 & 0 & b_1{}^2 \\ a_3{}^2 & b_2{}^2 & b_1{}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

を得る．この行列式を四つの因数に分解すれば（問題 3，注意を参照），問題に掲げた等式を得る．

§ 55. 小行列式の行列式

1. 行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

における a_{pq} の余因子を A_{pq} とし，A_{pq} を組成分子として第二の行列式

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}$$

を作る．ただし行列式 $\boldsymbol{A}$ においては A_{pq} を第 p 列第 q 行におくのである．A, $\boldsymbol{A}$ の行列を結合すれば定理 8.8 によって

$$A\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} A & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & A & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & A \end{vmatrix}=A^{n}$$

を得る．これを独立変数 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ の間の恒等式と見れば，両辺を恒等的には0に等しくない A で割ってさしつかえない．ゆえに

$$\boldsymbol{A}=A^{n-1}$$

$\boldsymbol{A}$ を A の**逆行列式**という．

〔**定理 8.19**〕 n 次の行列式 A の逆行列式は A の $n-1$ 乗に等しい．

2. $\boldsymbol{A}$ を逆行列式というのは，次の理由に基づくのである．§ 53. で述べたように，A を一次変形

$$(x)=A(y) \tag{1}$$

の係数の行列とする．もし $|A|\neq 0$ ならば，この関係式を (y) に関して解くことができる．その結果は

$$\begin{aligned} |A|y_1&=A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n \\ |A|y_2&=A_{12}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{n2}x_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |A|y_n&=A_{1n}x_1+A_{2n}x_2+\cdots+A_{nn}x_n \end{aligned}$$

ゆえに (y) を (x) で表わすときの係数の行列を A^{-1} で表わして

$$(y)=A^{-1}(x) \tag{2}$$

とすれば，行列 A^{-1} において第 p 列，第 q 行に $\dfrac{A_{pq}}{|A|}$ がある．(2) は (1) の逆の一次変形である．

もしも，行列 A と A^{-1} とを結合するならば，

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

を得る．右辺の正方行列は第一対角線上の組成分子が1で，その他は0である．このような行列を**単位行列**といい，それをEで表わすことにする．

Eはすなわち恒等的一次変形

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$$

の係数の行列である．ゆえにそれを**恒等行列**ともいう．一次変形の結合から明らかな通り，行列 E を任意の行列 Bと結合するとき，結果はBである．

$$EB=BE=B.$$

すなわち，行列の結合において，因子Eはあたかも数の乗法における単位1と同様の性質をもつ．よってEを単位行列というのである．

（1）における行列 A, A^{-1} の順序を換えて結合しても，結果は単位行列である．

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

よって A, A^{-1} を互いに**逆行列**という．

定理 8.18 によって行列式に移れば，

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1.$$

ゆえに $|A|\neq 0$ であるときに限って，逆の行列 A^{-1} は可能である．

$|A|\neq 0$ であるとき，$AX=E$ または $XA=E$ を満足させる行列 X は A^{-1} に限ることは明らかである（§47）．

行列 $\boldsymbol{A}$ は A^{-1} ではないが，$|A|\neq 0$ なる場合において，$\boldsymbol{A}$ の各組成分子を $|A|$ で割れば，A^{-1} を得る．よって，やや不正確ながら，簡単のために，$\boldsymbol{A}$ を $|A|$ の逆の行列式というのである．

$|A|=0$ である場合には，A の位が $n-1$ ならば，$\boldsymbol{A}$ の列（または行）は互いに比例する（§50, 問題3）．精確にいえば，$\boldsymbol{A}$ の位は1である．$\boldsymbol{A}$ の位が $n-2$ 以下ならば，$\boldsymbol{A}$の組成分子はもちろんすべて0になる．

3. Aをn次の行列式，$\boldsymbol{A}$をその逆行列式とする．

$1, 2, \cdots, n$ の中から，m個の番号 $(\alpha, \beta, \cdots, \lambda)$ を取り出し，その残りの番号を $(\kappa, \rho, \cdots, \sigma)$ とする．ただし双方とも大きさの順に並べたものと仮定する．同様に，m個の番号 $(\alpha', \beta', \cdots, \lambda')$ の残りを $(\kappa', \rho', \cdots, \sigma')$ とする．

さて，逆行列式 $\boldsymbol{A}$ から $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ なる列と $\alpha', \beta', \cdots, \lambda'$ なる行とを取っ

て，$\boldsymbol{A}$ の m 次の小行列式を作る．それは §52 の記号によれば

$$\boldsymbol{A}^{(m)}\begin{pmatrix}\alpha' \beta' \cdots \lambda' \\ \alpha\ \beta\ \cdots \lambda\end{pmatrix}$$

である．また一方において，原行列式 A から残りの番号 $\kappa,\rho,\cdots,\sigma$ なる行と $\kappa',\rho',\cdots,\sigma'$ なる列とを取って $n-m$ 次の小行列式

$$A^{(n-m)}\begin{pmatrix}\kappa\ \rho\ \cdots\sigma \\ \kappa' \rho' \cdots \sigma'\end{pmatrix}$$

を作る．しからば次の定理が成り立つ．

〔**定理** 8.20〕　上の小行列式の間には次の関係がある．

$$(-1)^{(\alpha+\beta+\cdots+\lambda)+(\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda')}\boldsymbol{A}^{(m)}\begin{pmatrix}\alpha' \beta' \cdots \lambda' \\ \alpha\ \beta\ \cdots \lambda\end{pmatrix}=A^{m-1}\cdot A^{(n-m)}\begin{pmatrix}\kappa\ \rho\ \cdots\sigma \\ \kappa' \rho' \cdots \sigma'\end{pmatrix}.$$

左辺は逆行列式 $\boldsymbol{A}$ における小行列式 $\boldsymbol{A}^{(n-m)}\begin{pmatrix}\kappa' \rho' \cdots \sigma' \\ \kappa\ \rho\ \cdots\sigma\end{pmatrix}$ の余因子である．

$m=1$ とすれば，左辺は $(-1)^{\alpha+\alpha'}\boldsymbol{A}^{(1)}\begin{pmatrix}\alpha' \\ \alpha\end{pmatrix}=(-1)^{\alpha+\alpha'}A_{\alpha\alpha'}$ になり，右辺では $A^{m-1}=1$ で，$A\begin{pmatrix}\kappa\ \rho \cdots \\ \kappa' \rho' \cdots\end{pmatrix}$ は A の第 α 行第 α' 列を削り去った $n-1$ 次の小行列式になる．これはすなわち $A_{\alpha\alpha'}$ の定義にほかならない．

$m=n$ とすれば，左辺はすなわち逆行列式 $\boldsymbol{A}$ そのもので，右辺は A^{n-1} になる．すなわち定理 8.19 である．

〔**証**〕　行列式 A の行と列との順序を

行は　$\alpha,\beta,\cdots,\lambda$; $\kappa,\rho,\cdots,\sigma$　列は $\alpha',\beta',\cdots,\lambda'$; $\kappa',\rho',\cdots,\sigma'$

に変えて，その行列式を A' とする．すなわち

$$A'=\left|\begin{array}{ccccc:cccc}
a_{\alpha\alpha'} & a_{\alpha\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\alpha\lambda'} & a_{\alpha\kappa'} & a_{\alpha\rho'} & \cdot & a_{\alpha\sigma'} \\
a_{\beta\alpha'} & a_{\beta\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\beta\lambda'} & a_{\beta\kappa'} & a_{\beta\rho'} & \cdot & a_{\beta\sigma'} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{\lambda\alpha'} & a_{\lambda\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\lambda\lambda'} & a_{\lambda\kappa'} & a_{\lambda\rho'} & \cdot & a_{\lambda\sigma'} \\
\hdashline
a_{\kappa\alpha'} & a_{\kappa\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\kappa\lambda'} & a_{\kappa\kappa'} & a_{\kappa\rho'} & \cdot & a_{\kappa\sigma'} \\
a_{\rho\alpha'} & a_{\rho\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\rho\lambda'} & a_{\rho\kappa'} & a_{\rho\rho'} & \cdot & a_{\rho\sigma'} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{\sigma\alpha'} & a_{\sigma\beta'} & \cdot & \cdot & a_{\sigma\lambda'} & a_{\sigma\kappa'} & a_{\sigma\rho'} & \cdot & a_{\sigma\sigma'}
\end{array}\right|$$

しからば

$$A'=(-1)^{(\alpha+\beta+\cdots+\lambda)+(\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda')}A. \tag{4}$$

A' と次の行列とを結合する.

$$
A'=\left|\begin{array}{ccccc:cccc}
A_{\alpha\alpha'} & A_{\beta\alpha'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\alpha'} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
A_{\alpha\beta'} & A_{\beta\beta'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\beta'} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{\alpha\lambda'} & A_{\beta\lambda'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\lambda'} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\hdashline
A_{\alpha\kappa'} & A_{\beta\kappa'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\kappa'} & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\
A_{\alpha\rho'} & A_{\beta\rho'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\rho'} & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{\alpha\sigma'} & A_{\beta\sigma'} & \cdot & \cdot & A_{\lambda\sigma'} & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{array}\right| \qquad (5)
$$

すなわち A' における第 $1,2,\cdots,m$ 列は A' の第 $1,2,\cdots,m$ 行にある組成分子に対する原行列式 A における余因子で，また A' の第 $m+1,\cdots,n$ 列においては，第一対角線上に1をおくほかは，全部0とするのである.

しからば

$$
A'A'=\left|\begin{array}{ccccc:cccc}
A & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{\alpha\kappa'} & a_{\alpha\rho'} & \cdot & \cdot \\
0 & A & \cdot & \cdot & 0 & a_{\beta\kappa'} & a_{\beta\rho'} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & A & a_{\lambda\kappa'} & a_{\lambda\rho'} & \cdot & \cdot \\
\hdashline
0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{\kappa\kappa'} & a_{\kappa\rho'} & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{\rho\kappa'} & a_{\rho\rho'} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right| \qquad (6)
$$

すなわち $A'A'$ における第 $1,2,\cdots,m$ 列では，第一対角線上に A があるほかは全部0で，また第 $m+1,\cdots,n$ 列は A' の第 $m+1,\cdots,n$ 列と同じものである.

よって(5)，(6)から

$$
A'\cdot\begin{vmatrix}
A_{\alpha\alpha'} & A_{\beta\alpha'} & \cdot & A_{\lambda\alpha'} \\
A_{\alpha\beta'} & A_{\beta\beta'} & \cdot & A_{\lambda\beta'} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{\alpha\lambda'} & A_{\beta\lambda'} & \cdot & A_{\lambda\lambda'}
\end{vmatrix}=A^m\begin{vmatrix}
a_{\kappa\kappa'} & a_{\kappa\rho'} & \cdot & a_{\kappa\sigma'} \\
a_{\rho\kappa'} & a_{\rho\rho'} & \cdot & a_{\rho\sigma'} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{\sigma\kappa'} & a_{\sigma\rho'} & \cdot & a_{\sigma\sigma'}
\end{vmatrix}.
$$

ゆえに（4）から

$$(-1)^{(\alpha+\beta+\cdots+\lambda)+(\alpha'+\beta'+\cdots+\lambda')}A^{(m)}\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\cdots\lambda'\\ \alpha\ \beta\ \cdots\lambda\end{pmatrix}=A^{m-1}\cdot A^{(n-m)}\begin{pmatrix}\kappa\ \rho\ \cdots\sigma\\ \kappa'\rho'\cdots\sigma'\end{pmatrix}$$

すなわち上の定理の通り．

4. n次の行列式Aから，m行m列を取ってm次の小行列式を作る．取った行の番号を大きさの順に $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m$，列の番号を $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m$ として，その小行列式を

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_m\end{pmatrix} \tag{7}$$

と書く．$1,2,\cdots,n$ から取り出したこのような番号の組合せは $\nu=\binom{n}{m}$だけある．それらの組合せに1からνまでの番号をつける．番号のつけ方は随意であるが，ここでは簡明のために，辞書式にする．

辞書式の順序というのは，まず各々の組合せを上のように大きさの順に書いて，第一の数字の小さい方を前，大きい方を後にする．第一の数字が同じならば，第二の数字の大小によって前後をきめる。以下同様である．たとえば $n=5, m=3, \nu=\binom{5}{3}=10$ とすれば，次の通り．

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
123	124	125	134	135	145	234	235	245	345

(§ 26, 2. 139 頁を参照)．

さて，ν 個の組合せの番号が定められたとして，（7）に取って組合せ

$$(p)\quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \qquad\qquad (q)\quad \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$$

がp番，q番であるとすれば，小行列式（7）を

$$A_{p,q}^{(m)}$$

で示すことができる．そこでこれらの小行列式をν行ν列に配列して，ν次の行列式が作られる．すなわち上の小行列式を第p行，第q列におくのである．この行列式（m次の誘導行列式）を

$$A^{(m)}=\begin{vmatrix}A_{11}^{(m)} & A_{12}^{(m)}\cdots & A_{1\nu}^{(m)}\\ A_{21}^{(m)} & A_{22}^{(m)}\cdots & A_{2\nu}^{(m)}\\ \cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot\\ A_{\nu1}^{(m)} & A_{\nu2}^{(m)}\cdots & A_{\nu\nu}^{(m)}\end{vmatrix} \tag{8}$$

とする．またもとの行列式 A における $A_{pq}^{(m)}$ の余因子を $\boldsymbol{A}_{pq}^{(m)}$ として，それを第 q 行，第 p 列において（転置）作られる ν 次の行列式を

$$\boldsymbol{A}^{(m)}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{(m)} & \boldsymbol{A}_{21}^{(m)} & \cdot & \boldsymbol{A}_{\nu 1}^{(m)} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{(m)} & \boldsymbol{A}_{22}^{(m)} & \cdot & \boldsymbol{A}_{\nu 2}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot \\ \boldsymbol{A}_{1\nu}^{(m)} & \boldsymbol{A}_{2\nu}^{(m)} & \cdot & \boldsymbol{A}_{\nu\nu}^{(m)} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

とする．さて $A^{(m)}, \boldsymbol{A}^{(m)}$ の行列を結合すれば（定理8.16, 8.17）

$$A^{(m)}\boldsymbol{A}^{(m)}=\begin{vmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{vmatrix}=A^{\nu}.$$

これを独立変数 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ の間の恒等式と見れば，行列式 A が分解不可能の多項式であることから

$$\boldsymbol{A}^{(m)}=cA^{\mu} \qquad (10)$$

を得る． c は定数，μ は正の整数である．

行列式 A が $a_{11},\cdots,a_{nn}$ の多項式として分解不可能であることは，A が各行各列の文字に関して斉次一次であることから容易にわかるであろう．仮りに B を A の因子として，B が a_{pq} を含むとすれば，B は $a_{p1},\cdots,a_{pn}$ の斉次一次式で，したがって a_{p1} を含むから，第1列の文字 $a_{11},\cdots,a_{n1}$ の斉次一次式，同様に第2列，…，第 n 列の文字の斉次一次式でなければならない．すなわち B は A と一致する．

（10）において，指数 μ を定めるには，両辺の次数を比較すればよい．また定数因子 c を定めるには，A の組成分子に特別な値を与えて，両辺の値を比較すればよい．いま $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$ とし，その他の a_{pq} はすべて0とする．すなわち A をいわゆる対角線行列〔a〕とする．しからば $A=a^n, A_{pp}^{(m)}=a^m$，$A_{pq}^{(m)}=0\ (p\neq q)$，$\boldsymbol{A}^{(m)}=a^{m\nu}$ だから，

$$a^{m\nu}=ca^{n\mu}.$$

ゆえに，$c=1$．$m\nu=n\mu$．

$$\mu=\frac{m\nu}{n}=\frac{m}{n}\binom{n}{m}=\frac{m}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\,!}=\binom{n-1}{m-1}.$$

よって次の定理を得る.

〔**定理 8.21**〕　n次の行列式Aからのm次の小行列式の行列式 $A^{(m)}$ はAの冪に等しい. その指数は$\binom{n-1}{m-1}$である.

$$A^{(m)}=A^{\binom{n-1}{m-1}}. \tag{11}$$

5.　定理 8.20 において, 行列式Aの小行列式と, 逆行列式$\boldsymbol{A}$のそれに対応する小行列式との間の関係を求めたのと全く同様の方法を, 上の行列式$A^{(m)}$に施すことができる.

いま行列式 $A^{(m)}$ の $1,2,\cdots,\nu$ の行から μ 行を取って, それを番号順に$p_1<p_2<\cdots<p_\mu$ とし, その余りをやはり番号順に $p_1'<p_2'<\cdots<p'_{\nu-\mu}$ とする. また μ 列の番号を $q_1<q_2<\cdots<q_\mu$, その余りを $q_1'<q_2'<\cdots<q'_{\nu-\mu}$ とする, すなわちpとp'とまたqとq'と, いずれも合わせて $1,2,\cdots,\nu$ になるのである. さて$A^{(m)}$から $p_1,p_2,\cdots,p_\mu$ 番の行と $q_1,q_2,\cdots,q_\mu$ 番の列とを取って作った μ 次の行列式を

$$A^{(m)}\binom{p_1p_2\cdots p_\mu}{q_1q_2\cdots q_\mu}$$

とし, 余因子の行列式 $\boldsymbol{A}^{(m)}$ から, q_1', q_2', $\cdots$, $q'_{\nu-\mu}$ 番の行と, p_1', p_2', $\cdots,p'_{\nu-\mu}$ 番の列とを取って作った $\nu-\mu$ 次の小行列式を

$$\boldsymbol{A}^{(m)}\binom{q_1'q_2'\cdots q'_{\nu-\mu}}{p_1'p_2'\cdots p'_{\nu-\mu}}$$

とすれば次の関係式が成り立つ.*

$$(-1)^{\Sigma p+\Sigma q}\boldsymbol{A}^{(m)}\binom{q_1'q_2'\cdots q'_{\nu-\mu}}{p_1'p_2'\cdots p'_{\nu-\mu}}=A^{n(\nu-\mu)-m\nu}A^{(m)}\binom{p_1p_2\cdots p_\mu}{q_1q_2\cdots q_\mu} \tag{12}$$

§56.　Sylvester の定理

1.　n次の行列式 $A=|a_{pq}|$ からr次の小行列式

---

* ここで $A, \boldsymbol{A}$ の肩についた (m) は定理 8.20 のとは違う. 定理 8.20 の関係式でAと$\boldsymbol{A}$との肩についたのは小行列式の次数を示すものであった. ここではその次数は行と列との番号 $\mu,\nu-\mu$ の数で示されている.

$$A_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}$$

を取って，A において A_r を含む $r+1$ 次の小行列式を次のように表わす．

$$B_{\alpha\beta}=\left|\begin{array}{ccc:c} & & & a_{1,r+\beta} \\ & & & a_{2,r+\beta} \\ & A_r & & \cdots \\ & & & \alpha_{r,r+\beta} \\ \hdashline a_{r+\alpha,1} & \cdot\ \cdot & a_{r+\alpha,r} & a_{r+\alpha,r+\beta} \end{array}\right| \quad (\alpha,\beta=1,2,\cdots,n-r).$$

〔**定理** 8.22〕（**Sylvester の定理**）　上の小行列式 $B_{\alpha\beta}$ を組成分子とする $\boldsymbol{n-r}$ 次の行列式を $\boldsymbol{B}$ とする．しからば

$$\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdot & B_{1,n-r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdot & B_{2,n-r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n-r,1} & B_{n-r,2} & \cdot & B_{n-r,n-r} \end{vmatrix}=A_r{}^{n-r-1}A.$$

〔**証**〕 いろいろ証明の方法はあるが，次に述べる本定理の拡張に適応するものを述べる．

A の逆行列式を $\boldsymbol{A}$ とすれば，定理 8.20 によって $(m=n-r-1)$

$$A^{n-r-2}B_{\alpha\beta}=(-1)^{\alpha+\beta}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} r+1,\cdots[r+\beta]\cdots n \\ r+1,\cdots[r+\alpha]\cdots n \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{r+1,r+2,\cdots,n}$ の中から $r+\alpha, r+\beta$ を取り除けることを示すために $[r+\alpha]$，$[r+\beta]$ をしるしておいた．

行列式 $\boldsymbol{B}$ の各組成分子に A^{n-r-2} を掛けて，上の等式の右辺を代入し，かつ第1, 2, …, $\boldsymbol{n-r}$ 行および列にそれぞれ $(-1),(-1)^2,\cdots,(-1)^{n-r}$ を掛けるならば，

$$A^{(n-r)(n-r-2)}\boldsymbol{B}$$

を得るが，それは

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} r+1,\cdots[r+\beta]\cdots n \\ r+1,\cdots[r+\alpha]\cdots n \end{pmatrix}$$

を組成分子（α行，β列の組成分子）とする行列式になる．この行列式はすなわち $n-r$ 次の行列式

$$\boldsymbol{A}_{n-r}=\begin{vmatrix} A_{r+1,r+1} & A_{r+2,r+1} & \cdot & \cdot & A_{n,r+1} \\ A_{r+1,r+2} & A_{r+2,r+2} & \cdot & \cdot & A_{n,r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r+1,n} & A_{r+2,n} & \cdot & \cdot & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

からの $n-r-1$ 次の小行列式の行列式であるから，定理 8.21 によって $\boldsymbol{A}_{n-r}^{n-r-1}$ に等しい．

しかるに定理 8.20 によれば

$$\boldsymbol{A}_{n-r}=A^{n-r-1}A_r.$$

ゆえに

$$A^{(n-r)(n-r-2)}\boldsymbol{B}=(A^{n-r-1}A_r)^{n-r-1}$$

すなわち

$$\boldsymbol{B}=A_r{}^{n-r-1}A.$$

2. 上の定理 8.22 を次のように拡張することができる．

定理 8.22 では，A_r を含む $r+1$ 次の小行列式を組成分子として行列式 $\boldsymbol{B}$ を作ったのであるが，もしも A_r を含む $r+s$ 次の小行列式を取るならば，どうか．

$r+1, r+2, \cdots, n$ の中から s 個の番号を取り出して，それらの $\nu=\binom{n-r}{s}$ 個の組合せに $1, 2, \cdots, \nu$ の番号をつけて，A_r に p 番の組合せの s 行と q 番の組合せの s 列とを添えて作った $r+s$ 次の小行列式を B_{pq} とする（$p, q=1, 2, \cdots, \nu$）．これら ν^2 個の B_{pq} を組成分子として ν 次の行列式 $\boldsymbol{B}$ を作るとすればそれは次のようになる．

〔定理 8.23〕（Sylvester の定理の拡張）

$$\boldsymbol{B}=A_r{}^e\cdot A^f,$$

ただし

$$e=\binom{n-r-1}{s},\quad f=\binom{n-r-1}{s-1}.$$

〔証〕 定理 8.22 と同様．この場合にも，$A^\alpha \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}_{n-r}$ からの小行列式に等しいから

$$A^\beta \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^\gamma{}_{n-r}=A_r{}^\mu A^\nu,$$

ゆえに

$$\boldsymbol{B}=A_r{}^e A^f.$$

指数 $(\alpha,\cdots,\nu)$ は途中で一々計算しないで，最後に至って，たとえば A の第一対角線の組成分子を $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{rr}=x$，$a_{r+1,r+1}=\cdots=a_{nn}=y$，その他は $a_{pq}=0$ とおいて，e,f を決定するのが近道である．

§ 57. 行列の Kronecker 積

m 個の独立変数 x_i の m 個の一次式

$$X_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{im}x_m\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

と，n 個の独立変数 y の n 個の一次式

$$Y_j=b_{j1}y_1+b_{j2}y_2+\cdots+b_{jn}y_n\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

とから，mn 個の積

$$X_iY_j=\sum_{p,q}a_{ip}b_{jq}x_py_q\qquad(p=1,2,\cdots,m,\ q=1,2,\cdots,n)$$

を作れば，それらは mn 個の x_py_p の一次的結合である．その m^2n^2 個の係数 $a_{ip}b_{jq}$ の行列を a_{ip} の行列と b_{jq} の行列との Kronecker 積という．

〔**定理 8.24**〕 行列 A,B の Kronecker 積を $A\times B$ と書けば，それらの行列の行列式の間に次の関係がある．

$$|A\times B|=|A|^n|B|^m.$$

ただし m,n は正方行列 A,B の次数である．

〔証〕 一定の j に対する m 個の積 $X_1Y_j, X_2Y_j,\cdots,X_mY_j$ の係数は行列 $A\times B$ の m 個の行を成す．それらを一組として，行列式 $A\times B$ の行を，$j=1,2,\cdots,n$ に対する n 組に分けて Laplace の展開を行なえば，$|A\times B|$ が因数 $|A|^n$ をもつことがわかる．同様に $|A\times B|$ は因数 $|B|^m$ をもつから，$|A\times B|$ は

$|A|^n|B|^m$ で割り切れる．よって次数を比較して

$$|A\times B|=c\,|A|^n|B|^m.$$

c を定めるために，A, B を単位行列とすれば，$X_iY_j=x_iy_j$ で $A\times B$ は単位行列になる．ゆえに $c=1$（証終）．

上の定理は次の一般的の定理からも導くことができる．

〔**定理** 8.25〕 $\varphi(A)$ は正方行列 A の組成分子の多項式で，任意の同次数の行列 B に関して $\varphi(AB)$ が $\varphi(A)$ で割り切れるならば，$\varphi(A)=\varphi(E)\cdot|A|^\nu$. ただし E は単位行列，ν は自然数である（Hurwitz）．

〔**証**〕 $\varphi(AB)=\varphi(A)\cdot Q$ とすれば，A の組成分子に関する次数を考えて，Q が B の組成分子だけの多項式であることがわかる．それを $\psi(B)$ と書けば

$$\varphi(AB)=\varphi(A)\psi(B).$$

さて，A, B を対角線行列〔s〕,〔t〕とすれば，AB は対角線行列〔st〕で

$$\varphi(st)=\varphi(s)\psi(t).$$

$\varphi(s)$ は s の多項式であるから*，これから

$$\varphi(s)=ks^\mu$$

を得る．k は定数，μ は自然数である．

いま $\boldsymbol{A}$ を A の逆行列式，$|A|=d$ とすれば，$A\boldsymbol{A}$ は対角線行列〔d〕で

$$\varphi(A\boldsymbol{A})=\varphi(d)=kd^\mu=\varphi(A)\psi(\boldsymbol{A})$$

ゆえに kd^μ は $\varphi(A)$ で割り切れる．d は分解不可能だから

$$\varphi(A)=c\,|A|^\nu$$

c は定数である．$A=E$ とおいて $c=\varphi(E)$（証終）．

定理 8.24 に関しては，略記法で

$$X=A(x),\quad Y=B(y),\quad XY=A\times B(xy)$$

と書き，また定理 8.25 の B の代わりに P を取って $x=Px'$，したがって $X=APx'$ とすれば，

$$XY=AP\times B(x'y)$$

---

* 精密にいえば，$\varphi[s]$ は $\varphi([s])$ と書くべきである．ここでは，それが s の多項式であることだけを論拠とする．

で，X_iY_j は x_iy_j の一次的結合，x_iy_j は $x_i'y_j$ の一次的結合だから $\varphi(A)=|A\times B|$ とおけば，$\varphi(AP)=|AP\times B|$ で $\varphi(AP)$ は $\varphi(A)$ で割り切れる*. ゆえに定理 8.25 によって

$$\varphi(A)=\varphi(E)A^n.$$

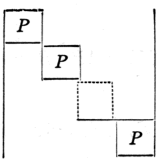
であるが，$\varphi(E)=|E\times B|=|B|^m$. すなわち $|A\times B|=|A|^n|B|^m$.

〔注意〕 275 頁に述べた誘導行列 $A^{(m)}$ に関して

$$AB=C \quad ならば \quad A^{(m)}B^{(m)}=C^{(m)}$$

なることは，Laplace の定理から容易に導かれる．ゆえに $\varphi(A)=|A^{(m)}|$ とおけば，$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$. したがって定理 8.25 から $\varphi(A)=|A|^e$ すなわち $|A^{(m)}|=|A|^e$ を得る（定理 8.21).

* $xy=C(x'y)$ とすれば，$AP\times B=(A\times B)C$. xy を $x_1y_1, x_2y_1, \cdots; x_1y_2, x_2y_2, \cdots;$ $\cdots$の順に，また $x'y$ を $x_1'y_1, x_2'y_1, \cdots; x_1'y_2, x_2'y_2, \cdots; \cdots$ の列に取れば，行列 C は



の形である．すなわち行列 P を図のように並べて書き，その他の空所には0をおくのである．

第9章　二　次　形　式

§58.　二重一次形式

1.　本章では行列論の重要な応用として二次形式論を述べるが，初めの二，三の定理はやや一般的に二重一次形式に関して説明する．

二組以上の変数の斉次式（代数形式，form）が各組の変数に関して一次であるときに，それを複一次形式という．変数が二組であるときには，特に二重一次形式（bilinear form）という．三重一次形式（trilinear form）などもこれに準ずる．

二組の変数を

$$(x):\quad x_1, x_2, \cdots, x_m$$
$$(y):\quad y_1, y_2, \cdots, y_n$$

とすれば，それらの変数に関する二重一次形式の一般の形は次のようになる：

$$A(x,y)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu.\qquad \begin{pmatrix}\mu=1,2,\cdots,m\\ \nu=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

係数 $a_{\mu\nu}$ を組成分子とする m 行 n 列の行列 A をこの二重一次形式の行列と略称する．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn}\end{pmatrix}$$

係数の行列と同一の文字 A を函数記号としても用いて，変数は代表的に x, y で表わしたのである．

第一に説明すべきことは，二重一次形式 $A(x,y)$ の一次変形である．$A(x,y)$ において変数 (x)，(y) に次の一次変形を行なう．

$$x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + \cdots + p_{1m}x_m',$$
$$x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + \cdots + p_{2m}x_m',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_m = p_{m1}x_1' + p_{m2}x_2' + \cdots + p_{mm}x_m'.$$

あるいは略して

$$(x) = P(x'), \qquad P = [p_{\alpha\beta}].$$

また

$$y_1 = q_{11}y_1' + q_{12}y_2' + \cdots + q_{1n}y_n',$$
$$y_2 = q_{21}y_1' + q_{22}y_2' + \cdots + q_{2n}y_n',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_n = q_{n1}y_1' + q_{n2}y_2' + \cdots + q_{nn}y_n'.$$

あるいは略して

$$(y) = Q(y'), \qquad Q = [q_{\alpha\beta}].$$

$A(x, y)$ に代入するときは，変数(x')，(y')の二重一次形式が生ずる．それを

$$B(x', y') = \sum b_{\mu\nu} x_\mu' y_\nu'$$

としるして，その係数の行列をBとする．

$$B = [b_{\mu\nu}]. \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots, m \\ \nu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

〔定理 9.1〕 二重一次形式 $A(x, y)$ が一次変形

$$(x) = P(x'), \qquad P = [P_{\alpha\beta}], \tag{1}$$
$$(y) = Q(y'), \qquad Q = [q_{\alpha\beta}] \tag{2}$$

によって $B(x', y')$ に変形されるとき，原式と変形後の式の行列の間に次の関係がある，

$$\boldsymbol{B = P'AQ}, \tag{3}$$

ただし P' は行列Pの行を列とし，列を行とした行列すなわちPの転置行列を表わす．

〔注意〕 $P'AQ$ は行列の結合を示すのである．詳しく書けば

$$b_{\mu\nu} = \sum_{s,t} p_{s\mu} a_{st} q_{t\nu} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \cdots, m \\ t = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

〔証〕

$$B(x', y') = \sum_{s,t} a_{st}(p_{s1}x_1' + p_{s2}x_2' + \cdots + p_{sm}x_m')(q_{t1}y_1' + q_{t2}y_2' + \cdots + q_{tn}y_n')$$

$$= \sum_{\mu,\nu} x_\mu' y_\nu' \left(\sum_{s,t} p_{s\mu} a_{st} q_{t\nu} \right)$$

ゆえに上の通り

$$b_{\mu\nu} = \sum_{s,t} p_{s\mu} a_{st} q_{t\nu}. \tag{4}$$

この結果を見やすくしるすために，行列の結合を用いて

$$B = P'AQ$$

とする．$\sum_s p_{s\mu} a_{st}$ はすなわち $P'A$ における第 μ 行第 t 列にある組成分子であるから，$(P'A)Q$ における第 μ 行第 ν 列の組成分子は $\sum_t (\sum_s p_{s\mu} a_{st}) q_{t\nu}$ すなわち $b_{\mu\nu}$ である．あるいはまた和の順序を変えて $\sum_s p_{s\mu} (\sum_t a_{st} q_{t\nu})$ とすれば，これは $P'(AQ)$ における第 μ 行，第 ν 列の組成分子である．すなわち $(P'A)Q = P'(AQ)$．ゆえに括弧なしに $P'AQ$ としるす．

このように行列の結合においては**結合法則**が成り立つ．

上の結果は器械的の計算によって得たのであるが，B が P', A, Q から結合によって得られるものであることは，次のように考えると，よくわかる．

$A(x, y)$ の項を (x) に関してくくれば

$$A(x, y) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_m\eta_m,$$

ただし

$$\eta_\mu = a_{\mu1}y_1 + a_{\mu2}y_2 + \cdots + a_{\mu n}y_n, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

あるいは略して

$$(\eta) = A(y).$$

同じように

$$B(x', y') = x_1'\eta_1' + x_2'\eta_2' + \cdots + x_m'\eta_m'$$

$$\eta_\mu' = b_{\mu1}y_1' + b_{\mu2}y_2' + \cdots + b_{\mu n}y_n' \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

とすれば

$$(\eta')=B(y').$$

さて　$A(x,y)=\sum x_\mu \eta_\mu$ において，まず変数（x）に一次変形

$$(x)=P(x')$$

を行なえば

$$\sum_{\mu=1}^{m}(p_{\mu1}x_1'+p_{\mu2}x_2'+\cdots+p_{\mu m}x_m')\eta_\mu$$

$$=\sum_{s=1}^{m}x_s'(p_{1s}\eta_1+p_{2s}\eta_2+\cdots+p_{ms}\eta_m).$$

ゆえに

$$\eta_s'=p_{1s}\eta_1+p_{2s}\eta_2+\cdots+p_{ms}\eta_m. \qquad (s=1,2,\cdots m)$$

あるいは

$$(\eta')=P'(\eta)$$

これと上の

$$(\eta)=A(y),$$

$$(y)=Q(y')$$

から，一次変形の結合によって（§53）

$$(\eta')=P'AQ(y')$$

を得る．よって

$$B=P'AQ.$$

2.　上の一次変形の公式はまったく計算的であるから，恒等的に成り立つのであるが，この後一次変形はすべて正則一次変形に限ることにする．すなわち（1）および（2）において，行列式

$$|P|\neq 0, \qquad |Q|\neq 0$$

と仮定する．

二重一次形式　$f=A(x,y)$　から正則一次変形で　$f'=B(x',y')$　を得る場合に，f と f' を対等（equivalent）といい，それを次のようにしるす．

$$f\sim f'.$$

このような対等の関係は，例の三条件を充実する（§2）．すなわち

1°)　反射的である．

$$f \sim f.$$

恒等一次変形　$(x)=(x')$，$(y)=(y')$　による．

2°)　対称的である．すなわち

$$f \sim f' \quad \text{ならば} \quad f' \sim f.$$

逆の一次変形による．

行列に関していえば次の通り．

$$B=P'AQ \quad \text{ならば}, \quad A=(P^{-1})'BQ^{-1}.$$

実際　$(P^{-1})'BQ^{-1}=(P^{-1})'P'AQQ^{-1}=E_mAE_n=A$　である．E_m, E_n は m 次および n 次の単位行列を示す．$(P^{-1})'=(P')^{-1}$．（§55, 2）

3°)　推移的である．すなわち

$$f \sim f', \quad f' \sim f'' \quad \text{ならば}, \ f \sim f''.$$

一次変形の結合による．

f, f', f'' の係数の行列を A, B, C とすれば

$$B=P'AQ,\ C=P_1{}'BQ_1, \quad \text{から} \quad C=P_1{}'P'AQQ_1=(PP_1)'A(QQ_1).$$

ここで注意すべきことは

$$(PP_1)'=P_1{}'P'$$

なる関係である．すなわち二つの行列を結合して後に行と列との転置を行なっても，または各行列に転置を行なって後反対の順序に結合をしても，結果は同一である．実際結合を行なってためして見ればわかる．二つより多くの行列においても同様である．すなわち

$$(PP_1P_2)'=P_2{}'P_1{}'P', \ \text{など}.$$

§ 59.　二重一次形式の位と標準形式

1.　二重一次式　$A(x,y)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$ $(\mu=1,2,\cdots,m\,;\,\nu=1,2,\cdots,n)$ の係数の行列 A の位 r をその**二重一次形式の位**という．

〔**定理 9.2**〕　**二つの二重一次形式の位が相等しいことは，それらが対等なために必要かつ十分な条件である．**

〔**証**〕　二つの二重一次形式の行列を A, B とする．まず対等の場合，すなわち

$$B=P'AQ, \quad |P| \neq 0, \quad |Q| \neq 0$$

なるとき，AとBとの位が相等しいことを示そう．

一般に，ある行列Aの右に他の行列Sを結合して A_1 なる行列を得たとすると，すなわち $AS=A_1$ において，A_1 の位は A の位よりも高くはならないのである．なぜならば，実際結合を行なって見ればわかるように，A_1 の各列はAの列の一次的結合であるから，もしもAにおけるk次の小行列式が全部0になるならば，A_1 においてもk次の小行列式は全部0になる．

もしも $|S| \neq 0$ ならば，$AS=A_1$ から $A=A_1S^{-1}$ を得る．ゆえに同じ理由によって，Aの位は A_1 の位よりも高くはなく，したがってこの場合には，Aと A_1 との位は相等しい．

Aの左方にSを結合するときも同様である（SA の各行が A の行の一次的結合になる）．

したがって A の右および左に行列式の0にならない行列をつけて結合を行なっても，位は変わらない．

ゆえに，上の対等の場合には，AとBとの位は等しいのである．

次に，位の等しい二重一次形式は対等であることを示すために，二重一次形式の位を r とすれば，それが

$$E_r(X, Y)=X_1Y_1+X_2Y_2+\cdots+X_rY_r$$

と対等であることを示そう．しからば，位が r である二重一次形式は同一の二重一次形式と対等であるから，したがって互いに対等である（§58）．

行列 A において

$$A_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定する．しからば A における $r+1, \cdots, n$ 行は $1, 2, \cdots, r$ 行の一次的結合である（定理8.11）．ゆえに $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ は285頁の通りとして

$$A(x, y)=x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_m\eta_m$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_r\eta_r \\
&\quad + x_{r+1}(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \cdots + \lambda_r\eta_r) \\
&\quad + x_{r+2}(\lambda_1'\eta_1 + \lambda_2'\eta_2 + \cdots + \lambda_r'\eta_r) \\
&\quad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

になるような定数因子 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots; \lambda_1', \lambda_2', \cdots, \cdots$ が求められる.

よって

$$
\begin{aligned}
A(x, y) = &(x_1 + \lambda_1 x_{r+1} + \lambda_1' x_{r+2} + \cdots)\eta_1 \\
&+ (x_2 + \lambda_2 x_{r+1} + \lambda_2' x_{r+2} + \cdots)\eta_2 \\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ (x_r + \lambda_r x_{r+1} + \lambda_r' x_{r+2} + \cdots)\eta_r.
\end{aligned}
$$

右辺の括弧の中にある (x) の一次式を $X_1, X_2, \cdots, X_r$ とし, また (y) の一次式である $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ としるせば

$$A(x, y) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_rY_r.$$

ここで $X_1, X_2, \cdots, X_r$ はその形から見える通り, (x) の互いに独立な一次式である. また $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ すなわち $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ は仮定によって $A_r \neq 0$ であるから, (y) の互いに独立な一次式である. ゆえに (x) の一次式 $X_{r+1}, \cdots, X_m$ および (y) の一次式 $Y_{r+1}, \cdots, Y_n$ を適当に定めて

$$
\begin{aligned}
(X) &= P(x), \qquad |P| \neq 0, \\
(Y) &= Q(y), \qquad |Q| \neq 0
\end{aligned}
$$

とすることができる. ゆえに $A(x, y) \sim E_r(X, Y)$.

上の $E_r(X, Y)$ を位が r なる二重一次形式の**標準形式**という.

上の場合には, $X_{r+1} = x_{r+1}, \cdots, X_m = x_m; Y_{r+1} = y_{r+1}, \cdots, Y_n = y_n$ としてよい. もちろん $r < m$ または $r < n$ の場合に関していうのである.

$r = m$ ならば $A(x, y) = x_1\eta_1 + \cdots + x_m\eta_m$ がすでに標準形式である. $r = n$ ならば (y) を (x) に代用する.

また
$$A_r = A_r\begin{pmatrix}12\cdots r\\12\cdots r\end{pmatrix} \neq 0$$
と仮定したことは, 記号の簡単のためにすぎない.

$$A_r\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix} \neq 0$$

でもまったく同様である. さりながら, 行列 A の行または列の順序を変えることは,

つまり $A(x,y)$ における変数 (x)，(y) の番号のつけ換えで，変数の番号を変えることは一種特別な一次変形にほかならないから，A_r を上のようにおいても，差支えないのである．

§60. 二　次　形　式

1.　n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の二次形式を次のように表わす．

$$A(x,x)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu, \qquad a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}. \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,n)$$

すなわち

$$a_{11}x_1{}^2+\cdots+a_{nn}x_n{}^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

で，x_1x_2 のような平方でない項の係数は $2a_{12}$ のように数字係数2をつけておくのであるが，同時にまた $a_{21}=a_{12}$ とおいて $2a_{12}x_1x_2$ を $a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1$ のようにもしるすのである．この記法が大切である．

係数 $a_{\mu\nu}$ の行列を略して二次形式の行列という．それは

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

で，いわゆる**対称行列**である．すなわち第一対角線に関して対称の位置にある組成分子 $a_{\mu\nu}, a_{\nu\mu}$ が相等しく，したがって行と列との転置によって行列が変わらない．

$$A'=A.$$

二次形式　$A(x,y)$ に一次変形

$$(x)=P(x'), \qquad P=[p_{\alpha\beta}], \qquad |P|\neq 0$$

を行なうときは新変数 (x') の二次形式が生ずる．

それを $B(x',x')=\sum b_{\mu\nu}x'_\mu x'_\nu$ として，係数の行列を B とする．

行列 A, B の間の関係は定理9.1から得られる．

もとの二次形式の係数で二重一次形式 $A(x,y)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$ を作って，変数 (y) にも (x) と同一の一次変形

$$(y)=P(y')$$

を行なって後 $(x')=(y')$ とすれば，それはすなわち変形後の二次形式 $B(x', x')$ である．ゆえに次の定理を得る．

〔定理 9.3〕 二次形式 $A(x,x)$ に一次変形 $(x)=P(x')$ を行なうときに，係数の行列 A が B になるとすれば

$$\boldsymbol{B=P'AP} \tag{1}$$

すなわち

$$b_{\mu\nu}=\sum_{s,t} a_{st}p_{s\mu}p_{t\nu}. \qquad (s,t=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

二次形式 $A(x,x)$ の係数の行列式 $|A|$ を略して二次形式の行列式または**判別式**という．

しからば（1）から

$$|B|=|A|\cdot|P|^2 \tag{3}$$

を得る．すなわち変形後の二次形式の判別式は原二次形式の判別式と $(a_{\mu\nu})$ に関しては定数である因数（一次変形の係数の行列式の平方 $|P|^2$）だけで違う．すなわち判別式は二次形式の不変式（§ 29）である．

よって二次形式の判別式が 0 に等しい，または 0 に等しくないという性質は，一次変形（正則一次変形，$|P|\neq 0$）のために影響されない．

それのみならず，行列 A の位がすでに一次変形によって不変である（定理 9.2）．

行列 A の位が二次形式 $A(x,x)$ の基本的の性質であることは，次節以下で述べるであろう．

〔注意〕 上の判別式は初等代数における二次式の判別式と符号が反対である．二つの変数 x, y の二次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ において，上の定義によれば判別式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2$$

である．判別式が 0 になるか，ならないかだけが問題である場合には，どちらにしても同じであるが，判別式の符号を考える場合には，この差別に注意することが必要である．

2. 二次形式に連関して極形式（ポーラー，153 頁参照）が用いられる．

$$A(x,x)=\sum a_{pq}x_px_q$$

を x_i に関して微分して，

$$A_i(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n, \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

とおく．しからば，$x_1{}^0, x_2{}^0, \cdots, x_n{}^0$ に関する極形式は

$$A(x^0,x)=x_1{}^0A_1(x)+x_2{}^0A_2(x)+\cdots+x_n{}^0A_n(x)$$

$$=\sum_{p,q=1}^{n}a_{pq}x_p{}^0x_q$$

である．行列 A の対称のために

$$A(x^0,x)=A(x,x^0) \tag{4}$$

である．

二次形式の一次変形は，極形式を用いて，次のようにしるされる．すなわち，一次変形を

$$x=P(x'), \quad P=\begin{pmatrix} p_1{}^{(1)} & p_1{}^{(2)} & \cdot & p_1{}^{(n)} \\ p_2{}^{(1)} & p_2{}^{(2)} & \cdot & p_2{}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n{}^{(1)} & p_n{}^{(2)} & \cdot & p_n{}^{(n)} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}A(p^{(i)},p^{(j)})x_i{}'x_j{}' \tag{5}$$

$p^{(i)}, p^{(j)}$ は行列 p の第 i 列，第 j 列の組成分子を代表する．

これは，（2）を書き直したまでである．

§ 61.　対 称 行 列 式

1．行列式において第一対角線に関して対称な位置にある組成分子が相等しい（$a_{pq}=a_{qp}$）とき，それを対称行列式という．たとえば二次形式の判別式は対称である．本節では対称行列式が特有する二，三の性質に関して述べる．

対称行列式Aからの小行列式の中で，同番号の行と列とを同一の順序に取って作ったもの，すなわち

$$A\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & \cdot & a_{\alpha\lambda}\\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & \cdot & a_{\beta\lambda}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda\alpha} & a_{\lambda\beta} & \cdot & a_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}$$

はやはり対称である．それらを**首座の小行列式**という．

対称行列では位が首座の行列式によって定められる．すなわち次の定理の通り．

〔定理 9.4〕 **対称行列の位が r ならば，r 次の首座行列式の中に 0 に等しくないものがある．組成分子が実数であるときには，それらは同一の符号をもつ．**

〔**証**〕 Aを対称行列式，rをAの位，0に等しくないr次の小行列式を

$$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}\neq 0 \tag{1}$$

とする．しからば A における各行は $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ なる行の一次的結合である(定理 8.11)．よって

$$\begin{aligned}
&(\text{第}\,\alpha'\,\text{行})=c_{11}\times(\text{第}\,\alpha\,\text{行})+c_{12}\times(\text{第}\,\beta\,\text{行})+\cdots+c_{1r}\times(\text{第}\,\lambda\,\text{行}),\\
&(\text{第}\,\beta'\,\text{行})=c_{21}\times(\text{第}\,\alpha\,\text{行})+c_{22}\times(\text{第}\,\beta\,\text{行})+\cdots+c_{2r}\times(\text{第}\,\lambda\,\text{行}),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(\text{第}\,\lambda'\,\text{行})=c_{r1}\times(\text{第}\,\alpha\,\text{行})+c_{r2}\times(\text{第}\,\beta\,\text{行})+\cdots+c_{rr}\times(\text{第}\,\lambda\,\text{行})
\end{aligned}$$

とする．

$\alpha',\beta',\cdots,\lambda'$ の中に $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ の中のあるものと同じ番号があってもよい．たとえば $\alpha'=\beta$ ならば，$c_{11}=0, c_{12}=1, c_{13}=0,\cdots,c_{1r}=0$ とする．

Aは対称であるから，上の関係は列に関しても同じ乗数 $c_{11},c_{12},\cdots,c_{1r};\cdots;c_{r1},c_{r2},\cdots,c_{rr}$ をもって成り立つ．

しからば，対称に注意して

$$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \cdots\lambda\\ \alpha\ \beta\ \cdots\lambda\end{pmatrix}\times C=A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \cdots\lambda\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}\times C=A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\cdots\lambda'\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix},\tag{3}$$

ただし

$$C=\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1r}\\ c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdot & c_{rr}\end{vmatrix}.$$

よって（1），（2）から

$$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}\neq 0.$$

すなわち，定理の前半が証明されたのである．

さて　$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}\neq 0$　として，　C の組成分子は上の（4）と同様の意味をもつとせよ．しからば（2），（3）が成り立ち，したがって

$$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\cdots\lambda'\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}=A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}\times C^2.$$

ゆえに　$A^{(r)}\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\cdots\lambda'\\ \alpha'\beta'\cdots\lambda'\end{pmatrix}\neq 0$　ならば，そうして組成分子がすべて実数ならば，C の組成分子も実数であるから，$C^2>0$．ゆえに定理の後半が証明されたのである．

$k<r$ ならば，k 次の首座行列式が全部0になることはあり得る．たとえば

$$\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdot & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdot & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

のように位は n で，1次の首座行列式は全部0であることもある．

また

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ a & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

では1次および3次の首座行列式は全部0である．

2.　次の定理も後に引用されるものである.

〔**定理 9.5**〕　対称行列式Aの位がrならば，1次ないしr次の首座行列式$A_1, A_2, \cdots, A_r$を適当に選んで

$$A_0(=1),\ A_1, A_2, \cdots, A_r(\neq 0)$$

において，一般にA_kはA_{k-1}を含み，かつ二つの相接するものが同時に0にならないようにすることができる.

また組成分子が実数である場合には，$A_k=0$であるときは，A_{k-1}とA_{k+1}とは反対の符号をもつ.

〔**証**〕　Sylvester の定理 (8.22) によって，かつ対称を用いて，

$$A^{(k-2)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\\alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}A^{(k)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\mu\nu\\\alpha\beta\cdots\lambda\mu\nu\end{pmatrix}$$
$$=A^{(k-1)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\mu\\\alpha\beta\cdots\lambda\mu\end{pmatrix}A^{(k-1)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\nu\\\alpha\beta\cdots\lambda\nu\end{pmatrix}-\left[A^{(k-1)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\mu\\\alpha\beta\cdots\lambda\nu\end{pmatrix}\right]^2.$$

よってk次の首座行列式　$A^{(k)}\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\mu\nu\\\alpha\beta\cdots\lambda\mu\nu\end{pmatrix}$　の小行列式の中$k-1$次と$k-2$次との首座行列式が全部0ならば，$k-1$次の小行列式がすべて0，したがって$A^{(k)}$が0でなければならない.

いま対称行列式Aの位がrならば，r次の首座行列式の中に0に等しくないものがあるから，それをA_rとする．A_rに含まれる$r-1$次の首座行列式の中に0に等しくないものがあれば，それをA_{r-1}とする．このように進んで，k次の首座行列式A_kが0に等しくないとするとき，A_kに含まれる$k-1$次の首座行列式が全部0に等しいならば，上のように，$k-2$次の首座行列式の中には0に等しくないものが必ずあるから，それをA_{k-2}として，A_kに含まれA_{k-2}を含む$k-1$次の首座行列式をA_{k-1}にすればよい．最後にA_2が0に等しくないとき，A_1が0であっても，$A_0=1$とおくのであるから，それもさしつかえない.

次に定理の後段，組成分子が実数のときに，$A_k=0$ならば，Sylvester の定理によって，$A_{k-1}A_{k+1}=A_kA_k'-B_k^2=-B_k^2$になるから，$A_{k-1}A_{k+1}<0$. ($B_k$, A_k'はk次の小行列式である).

〔例〕

$$A_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$A_0=1,\ A_1=0,\ A_2=-b^2,\ A_3=0,\ A_4=(ab)^2.$$

$$A_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$A_0=1,\ A_1=c,\ A_2=0,\ A_3=-b^2c,\ A_4=0,\ A_5=a^2b^2c.$$

一般に

$$A_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n-1} & * \\ & & & & & * & * \\ 0 & a_{n-1,2} & * & * & * & * \\ a_{n1} & * & * & * & * & * & * \end{vmatrix} \neq 0$$

において，第二対角線の上側にある組成分子 $a_{pq}(p+q\leqq n)$ が0であるとき，n が偶数ならば，$A_0=1$，$A_1=0$ から始めて $A_2, A_4, \cdots$ は行列の中央から作り，$A_3, A_5, \cdots$ は0とする．また n が奇数ならば，$A_0=1$，$A_1=a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}$（中央の組成分子）から始めて $A_3, A_5, \cdots$ は中央から作り，$A_2, A_4, A_6, \cdots$ は0とすればよい．第二対角線の下側の組成分子 (*) は任意である．

〔問題1〕 対称行列 A において，r 次の首座行列式 $A_r\neq 0$ で，A_r を含む $r+1$ 次と $r+2$ 次との首座行列式が全部0ならば，行列の位は r である．

〔解〕 Sylvester の定理によって A_r を含む任意の $r+1$ 次の小行列式が0になる．ゆえに定理8.12によって A の位は r である（前頁参照）．

〔注意〕 対称行列 A において $r+1$ 次と $r+2$ 次との首座行列式が全部0ならば，位は r 以下である．ただし0に等しい A_r を含む $r+1$ 次と $r+2$ 次との首座行列式だけが全部0であっても位は r より高いこともある．たとえば A が n 次で第1行，第2行が互いに比例するならば，$A\binom{12}{12}$ を含む首座行列式は全部0であるが，位は $n-1$ でもあり得る．

〔問題2〕 n 次の対称行列式 A_n において，k 次の首座行列式 $A_k\neq 0$，それを含むある一つの首座行列式 $A_{k+1}=0$ また A_{k+1} を含むすべての首座行列式

$$A_{k+2}=0\ (k+2\leqq n)$$

ならば，$A_n=0$.

〔解〕　$A_k=A_k\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}\neq 0\quad A_{k+1}\begin{pmatrix}12\cdots k,\ k+1\\12\cdots k,\ k+1\end{pmatrix}=0,\quad A_{k+2}\begin{pmatrix}12\cdots k,\ k+1,\ \rho\\12\cdots k,\ k+1,\ \rho\end{pmatrix}=0$

$(\rho=k+2,\cdots,n)$ とすれば，Sylvester の定理によって

$$A_kA_{k+2}=\begin{vmatrix}0 & B_{k+1,\rho}\\ B_{\rho,k+1} & B_{\rho\rho}\end{vmatrix}=0\qquad\therefore\quad B_{k+1,\rho}=0\quad(\rho=k+2,\cdots,n).$$

ただし　$B_{\alpha\beta}=A_{k+1}\begin{pmatrix}12\cdots k\alpha\\12\cdots k\beta\end{pmatrix}$. ゆえに再び Sylvester の定理によって

$$A_k{}^{n-k-1}A_n=\begin{vmatrix}B_{k+1,k+1} & B_{k+1,k+2} & \cdot\ \cdot & B_{k+1,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ B_{n,k+1} & B_{n,k+2} & \cdot\ \cdot & B_{n,n}\end{vmatrix}=0\qquad\text{（第一行が全部 0）}$$

$A_k\neq 0$　だから，$A_n=0$.

〔**問題 3**〕　k 次の首座行列式 $A_k\neq 0$ $(k<r)$ ならば，A_k を含んで定理 9.5 にいうような首座行列式の一組 $A_0, A_1, \cdots, A_r$ を作ることができる.

〔解〕 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ は定理 9.5 のように，また $A_{k+1}, \cdots, A_r$ は問題 1 または 2 によって作る.

§ 62. 二 次 形 式 の 位

1.　二次形式 $A(x,x)$ が n 個の変数を含む場合に，もしもその位が r ならば，一次変形によってそれを r 個の変数の二次形式に変形することができる. これが二次形式の位の意義である.

〔**定理 9.6**〕　二次形式　$A(x,x)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$, $(\mu,\nu=1,2,\cdots,n)$ の位が r であるとき

$$A_r=A\begin{pmatrix}12\cdots r\\12\cdots r\end{pmatrix}\neq 0$$

とすれば，一次変形によって，$A(x,x)$ を

$$A_r(x',x')=\sum a_{\mu\nu}x_\mu' x_\nu'\ (\mu,\nu=1,2,\cdots,r)$$

なる二次形式に変ずることができる.

すなわち**変形後の二次形式は r 個の変数だけを含んで，かつその係数の行**

列が A_r になるのである．

〔証〕 仮定によって，$A_r \neq 0$ だから，連立一次方程式

$$A_i(x)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0, \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

は $n-r$ の互いに独立な解

$$x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots, x_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\cdots,n-r)$$

をもつ．それらを第 $r+1, r+2, \cdots, n$ の列として，行列

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdot & x_1^{(n-r)} \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdot & x_2^{(n-r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \cdot & x_r^{(n-r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdot & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

として，それを一次変形の係数の行列とする．しからば§60，（5）の公式において，$i \leqq r$，$j \leqq r$ ならば，$A(p^{(i)}, p^{(j)})=a_{ij}$．また $i>r$ または $j>r$ ならば，$A_i(x^{(\nu)})=0$，$A_j(x^{(\nu)})=0$ だから，$A(p^{(i)}, p^{(j)})=0$，ゆえに

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{r} a_{i,j}x_i'x_j'.$$

すなわち $A(x,x)$ が $x_1', x_2', \cdots, x_r'$ だけの二次形式に変形されたのである．

〔注意〕 二次形式の係数が実数である場合には，上の一次変形 P の係数をも実数とすることができる．

〔例1〕 二次形式 $f=\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ の位が1であるとする．しからば f は一つの変数の二次形式になる．すなわちいわゆる完全な平方になる．

$a_{11} \neq 0$ とすれば，A における二次の行列式は全部0になって，A の各行は第一行に比例する．ゆえに

$$f=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$$

〔例2〕 二次形式 f の位が2であるときには，f は二つの変数の二次形式に変形される．すなわち

$$f=aX^2+2bXY+cY^2$$

のような形になる．ゆえに f は二つの一次因数に分解される．

二つの変数の二次式を斉次の形にしるせば，三つの変数の二次形式を得る．この場合に

は，判別式が 0 に等しいときには，$r \leqq 2$ であるから，二次式が一次因数に分解される．

§ 63. 二次形式の標準形式

1. 二次形式の位が r ならば，それを r 個の変数の二次形式に変形することができるが，それを適当に変形して，r 個の変数の平方の項のみを含むような形

$$a_1X_1{}^2+a_2X_2{}^2+\cdots+a_rX_r{}^2$$

にすることができる．このような二次形式を**標準形式**という．

原二次形式 $A(x,x)$ の係数の行列 A において，首座行列式

$$A_r=A\binom{12\cdots r}{12\cdots r}\neq 0$$

ならば，それを $A_r(x',x')$ なる二次形式に変形し得るのであるから，初めから二次形式がすでにこのように変形されているものと見なして説明を進める．よって r の代わりに元の通り n なる文字を用いて，$A(x,x)$ の位を n とする．すなわち判別式 $|A|=A_n\neq 0$ とする．

さて変数 x に x^0 なる値を与えて—— $x_1,x_2,\cdots,x_n=x_1{}^0,x_2{}^0,\cdots,x_n{}^0$ なる値を与えることを，このように略していう —— $A(x^0,x^0)\neq 0$ とする．そうして x^0 に関する極形式 $A(x^0,x)$ を用いて

$$F(x,x)=A(x^0,x^0)A(x,x)-A(x^0,x)^2$$

とおいて，二次形式 $F(x,x)$ を偏微分して

$$F_i(x)=\frac{1}{2}\;\frac{\partial F}{\partial x_i}=A(x^0,x^0)A_i(x)-A(x^0,x)A_i(x^0)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

を得る(§ 60. 2 参照)．よって

$$F_i(x^0)=A(x^0,x^0)A_i(x^0)-A(x^0,x^0)A_i(x^0)=0.$$

すなわち x^0 は連立一次方程式 $F_i(x)=0$, $i=1,2,\cdots,n$ の解である．ゆえに一次式 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)$ の係数の行列式は 0 に等しい．しかるに，この行列式はすなわち二次形式 $F(x,x)$ の判別式であるから，$F(x,x)$ の位は n よ

りも低い．すなわち二次形式 $A(x,x)$ は，それから一つの平方項 $\frac{1}{A(x^0,x^0)}A(x,x^0)^2$ を引くことによって，位が低められる．この操作を続行すれば，$A(x,x)$ は多くとも n 個の平方項の和として表わされるのであるが，位は一次変形によって変わらないから，実際に n 個の平方項を要するのである．よって次の定理を得る．

〔**定理 9.7**〕 二次形式の位が r ならば，それを標準形式

$$a_1X_1^2+a_2X_2^2+\cdots+a_rX_r^2$$

に変形することができる．

$X_1, X_2, \cdots, X_r$ はもとの変数の互いに独立な一次式で，また係数 a_i は，一つも 0 でない．

2. これまで述べたことは，二次形式の位が基本になっていて，二次形式の係数が複素数であっても当てはまるのである．実際上，虚係数の二次形式は応用上の重大性が少ないから，これからは実係数の二次形式を考察する．その場合，実係数の一次変形によって，標準形式は得られるが，その際平方項の係数の符号が大切である．これに関して，次の定理が成り立つ．

〔**定理 9.8**〕 **与えられた実係数の二次形式を実一次変形によって標準形式にするときは，正項および負項の数は一定である．**

これを**二次式の惰性律**という．

〔**証**〕 二次形式 f の位を n とし，標準形式において

$$\begin{aligned}f&=a_1X_1^2+a_2X_2^2+\cdots+a_PX_P^2-a_{P+1}X^2_{P+1}-\cdots-a_nX_n^2\\&=a_1'X_1'^2+a_2'X_2'^2+\cdots+a'_{P'}X'^2_{P'}-a'_{P'+1}X'^2_{P'+1}-\cdots-a_n'X_n'^2\end{aligned}$$

とする．もちろん初めの P 項および P' 項は正項，その他は負項とするのである．そのとき $P=P'$ なることを証明することを要する．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は原変数 (x) の互いに独立な一次式である．$X_1', X_2', \cdots, X_n'$ も同様．

いま $P<P'$ と仮定すれば，$P+(n-P')<n$．よって

$$X_1=0, \cdots, X_P=0, X'_{P'+1}=0, \cdots, X_n'=0$$

を満足させる (x) の実数値が $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外に存在する．

その値を代入するとき，第一の標準形式によれば $f<0$，第二の標準形式に

よれば $f>0$ になる ($X_{P+1},\cdots,X_n$ が $X_1,\cdots,X_P$ と同時に0になり，または $X'_{P'+1},\cdots,X_n'$ と同時に $X_1',X_2',\cdots,X'_{P'}$ が 0 になることは，$x_1=x_2=\cdots=0$ であるときに限る．これらの一次式は仮定によって互いに独立であるから)．ゆえに $P<P'$ は不合理である．同様に $P'<P$ も不合理であるから，$P=P'$.

正項と負項との数の差 $P-N$ を二次形式の**符号定数**という．位を r，符号定数を σ とすれば

$$P=\frac{r+\sigma}{2},\qquad N=\frac{r-\sigma}{2}.$$

3. 二次形式の符号定数と，その判別式の首座行列式の符号との間に，密接な関係がある．いま変数の番号を適当に選んで首座行列式

$$A_0=1,\quad A_h=A\binom{12\cdots h}{12\cdots h}\quad h=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

が定理9.5に述べた条件を満たしているとする．すなわち相接する二つが0にならず，また $A_h=0$ ならば，A_{h-1} と A_{h+1} とは反対の符号をもち，かつ A_{h+1} に含まれる h 次の首座行列式はすべて0に等しいと仮定する．

さて，二次形式 $A(x,x)$ を f と書いて，乗数 λ を適当に定めて

$$f'=f-\lambda x_n^2$$

の位を低くすることを試みる．f' の判別式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=A_n-\lambda A_{n-1}$$

だから，$A_{n-1}\neq 0$ ならば，$\lambda=A_n/A_{n-1}$ とすればよい．そのとき定理9.6によって，f' を $n-1$ 個の変数の二次形式に変えて，しかも係数の行列を A_{n-1} にすることができる．ゆえに

$$f=\lambda x_n^2+\sum_{p,q=1}^{n-1}a_{p,q}x_p'x_q'.$$

もしまた $A_{n-1}=0$ ならば

$$f''=f-2\mu x_{n-1}x_n$$

とおいて，f'' を位が $n-2$ なる二次形式にすることができる．f'' の判別式は

$$\Delta=\begin{vmatrix} \boxed{A_{n-2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}-\mu \\ \cdot\ \cdot & a_{n,n-1}-\mu & a_{nn} \end{vmatrix}$$

したがって

$$A_{n-2}\Delta=\begin{vmatrix} A_{n-1} & B_{n-1,n}-\mu A_{n-2} \\ B_{n,n-1}-\mu A_{n-2} & B_{nn} \end{vmatrix}$$

$B_{\alpha\beta}$ の意味は定理 8.22 と同様である．さて，仮定によって，$A_{n-2}\neq 0$，$A_{n-1}=0$，$B_{nn}=0$．また対称のために $B_{n-1,n}=B_{n,n-1}$．ゆえに $\mu=B_{n-1,n}/A_{n-2}$ とすれば $\Delta=0$ で，かつ Δ の位は $n-2$ になる．よって前と同様に，f'' が $n-2$ 個の変数の二次形式に変形されて

$$f=2\mu x_{n-1}x_n+\sum_{p,q=1}^{n-2}a_{p,q}x_p'x_q'.$$

しかるに

$$2\mu x_{n-1}x_n=\frac{\mu}{2}((x_{n-1}+x_n)^2-(x_{n-1}-x_n)^2)$$

すなわちこの場合には，f から正と負と一つずつの平方項を抜き出して，位を $n-2$ に低めることができる．

このような操作を継続して，f を標準形式にすることができる．首座行列式（1）の中に0に等しいものがない場合には，上の方法によって

$$A(x,x)=\frac{A_1}{A_0}X_1^2+\frac{A_2}{A_1}X_2^2+\cdots+\frac{A_n}{A_{n-1}}X_n^2$$

を得る．この標準形式において，正項と負項との数は，それぞれ

$$A_0, A_1, \cdots, A_n$$

における符号連続と符号変化との数に等しいから，$A(x,x)$の符号定数 σ は次のように見事な形に表わされる．

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sign}\ A_{k-1}A_k. \qquad (2)$$

首座行列式（1）の中，$A_k=0$ なるものがあれば，上のような標準形式は得られないが，この場合には，A_k に対応して標準形式に一つの正項と一つの負項とが生ずるから，符号定数には影響はない．このとき $A_{k-1}A_k=0, A_kA_{k+1}=0$ で，（2）において二つの項が0になって，（2）はやはり成り立つのである．

4. 実係数の二次形式 f が実一次変形（正則，$|P|\neq 0$）によって f' に変形されるときに（すなわち f,f' が実一次変形に関して対等なときに），f と f' とを**同類**とする．この関係も反射的，対称的，推移的であるから，これによって二次形式を分類することができる．

二つの実二次形式の標準形式における正項および負項の数 P, N が一致することが，それらの二次形式が同類であるために必要かつ十分な条件である．

それが必要なことは，すなわち，惰性律であるが，

$$a_1X_1^2+\cdots+a_PX_P^2-a_{P+1}X^2_{P+1}-\cdots-a_{P+N}X^2_{P+N}$$

のような二次形式はすべて

$$\sqrt{a_1}X_1, \cdots, \sqrt{a_P}X_P, \cdots, \sqrt{a_{P+N}}X_{P+N}$$

を新変数として更に簡単な同一の標準形式

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_P^2-X^2_{P+1}-\cdots-X^2_{P+N}$$

に直すことができるから，上記は十分な条件である．

$P+N$ は二次形式の位 r に等しく，$\sigma=P-N$ は符号定数であるから，上の条件において P, N の代わりに r, σ を取ってもよい．

〔例〕 変数 $n=4$ 個の場合に，$r=4$ とすれば，$P=4,3,2,1,0$ に応じて $\sigma=\pm 4$, ± 2 または 0 である．もしも四つの変数を空間における四面座標とすれば，$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ は二次曲面の方程式であるが，$\sigma=\pm 4$ の場合は虚曲面，$\sigma=\pm 2$ の場合は楕円面，複葉双曲面，楕円放物面で，$\sigma=0$ の場合は単葉双曲面または双曲放物面である．$\sigma=0$ は二次曲面が実直線を含む場合の特徴である．

$\sigma=0$ ならば二次形式を $X^2-Y^2+U^2-V^2$ の形に変形することができる．すなわち $(X-Y)(X+Y)+(U-V)(U+V)=0$. ゆえに $X-Y=0$, $U-V=0$ と $X+Y=0$, $U+V=0$ とは相交わらない母線である．逆に A_1A_2 を曲面上の実直線とし，それを通

る平面 $A_1A_2A_3$ および $A_1A_2A_4$ が曲面と交わる他の直線をそれぞれ A_2A_3，A_1A_4 とし，平面 $A_1A_3A_4$ と曲面との交わりを A_1A_4 と A_3A_4 とする．四面体 $A_1A_2A_3A_4$ に関しての座標を x_1, x_2, x_3, x_4 とすれば，二次曲面の方程式は $a_{13}x_1x_3+a_{24}x_2x_4=0$ になる．ゆえに $\sigma=0$．したがって $\sigma=\pm 2$ であるときは曲面は実直線を含まない．

$r=3$ とすれば，$\sigma=\pm 3$，または ± 1 で，前者は虚の錐面，$\pm(X^2+Y^2+Z^2)=0$，後者は実の錐面，$\pm(X^2+Y^2-Z^2)=0$ に相当する．

$r=2$ とすれば $\sigma=\pm 2$ または0で，前者は二つの虚平面 $\pm(X^2+Y^2)=0$，後者は二つの実平面 $X^2-Y^2=0$ の場合である．

$r=1$ のときは，一つの実平面を二重に表わすのである．$\pm X^2=0$.

§ 64.　定符号の二次形式，不定符号の二次形式

1.　変数 n 個の実二次形式 $A(x,x)$ が標準形式において n 個の正項または n 個の負項をもつとき，すなわち $r=n$，$\sigma=\pm n$ の場合には，実変数 (x) の任意の値（もちろん $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ を除く）に対して $A(x,x)$ の値は一定の符号をもつ．この場合に $A(x,x)$ を**定符号**の二次形式（$\sigma=n$ ならば**正の二次形式**，$\sigma=-n$ ならば**負の二次形式**）という．もしも標準形式において正項と負項とが混じるときには，$A(x,x)$ は変数の値によって，あるいは正，あるいは負の値を取り，または0になる．この場合には，$A(x,x)$ を**不定符号**の二次形式という．

実際標準形式が $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_p^2-X^2_{p+1}-\cdots-X_n^2$ ならば，$X_{p+1}=\cdots=X_n=0$ であるような (x) に対して $A(x,x)$ は正になり，また $X_1=X_2=\cdots=X_p=0$ であるような (x) に対しては負になる．また $X_1=X_{p+1}$，$X_2=0, \cdots$ などに対しては0になる（$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ でなくて，0になる）．

〔**定理 9.10**〕　定符号の二次形式においては，係数の行列からの首座行列式は一つも0に等しくない．正の二次形式の特徴は，首座行列式が全部正であることであり，負の二次形式の特徴は首座行列式の偶数次のものは全部正，奇数次のものは全部負であることである．

〔**証**〕　まず正の二次形式の判別式 A_n が正であることは，判別式の不変性からわかる．すなわち §60（3）の公式

$$|B|=|A|\,|P|^2$$

において，Bを標準形式の行列とすれば，正の二次形式の場合，$|B|>0$，したがって $|A|>0$.

さて

$$A\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}$$

を任意の k 次の首座行列式とする．$f(x)$ において $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda$ 以外の変数を全部0とするならば，$f(x)$ は変数 $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\lambda$ に関する正の二次形式になる（$x_\alpha=x_\beta=\cdots=x_\lambda=0$ のほかの値に対して常に正だから）．そうして

$$A\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}$$

がその判別式である．ゆえに上の理由によって

$$A\begin{pmatrix}\alpha\beta\cdots\lambda\\ \alpha\beta\cdots\lambda\end{pmatrix}>0.$$

fが負の二次形式ならば，$-f$ は正の二次形式であるから，その首座行列式はすべて正である．よって各組成分子の符号を変えてもとの二次形式 f に返れば，定理の後の部分の正しいことがわかるであろう．

2. n個の変数の低位の二次形式（$r<n$）においても，$\sigma=\pm r$ ならば，その二次形式が取る値は0の外は一定の符号をもつ．しかしながら，この場合には，$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ でなくても，二次形式は0になり得る．標準形式は

$$\pm(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_r{}^2)$$

であるから，$X_1=X_2=\cdots=X_r=0$ であるような（x）の値に対して原二次形式が0になるのである．このような場合には，二次形式を**低位定符号*** の形式とでもいったらよいであろう．

〔**問題1**〕 二次形式 $f(x)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ の**逆の二次形式**というのは

(*) semi-definite.—— $\sigma=r$ のときに semi-positive, $\sigma=-r$ のときに semi-negative は耳ざわりだから，使われない．筆者は non-negative, non-positive ということにしているが，一定の術語がないらしい．邦語では，低位正形式，低位負形式などはどうか．

$$F(u)=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdot & u_n & 0 \end{vmatrix}=\sum A_{\mu\nu}u_\mu u_\nu \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,n)$$

なる二次形式である．$A_{\mu\nu}$ は A における $a_{\mu\nu}$ の余因子である．$|A|\neq 0$ の場合には，F の位は n で，また符号定数は $\sigma(F)=\pm\sigma(f)=\mathrm{sign}\,|A|\cdot\sigma(f)$.

〔解〕
$$u_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n, \qquad i=1,2,\cdots,n$$
とすれば
$$F(u)=|A|f(x).$$

〔注意〕 $|A|=0$ の場合には，$r=n-1$ のとき，$F(u)$ は完全平方で（位が1），$r<n-1$ のとき，$F(u)\equiv 0$.

〔**問題 2**〕 二次形式 $A(x,x)=\sum a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ $(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)$ において，

$$A_0=1,\quad A_k=A\binom{12\cdots k}{12\cdots k}\neq 0, \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$X_1=f_1,\quad X_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1,k-1} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2,k-1} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdot & a_{k,k-1} & f_k \end{vmatrix}, \qquad (k=2,3,\cdots,n)$$

$f_k=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $f=A(x,x)$ とすれば

$$A(x,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k^2}{A_{k-1}A_k}.$$

〔解〕

$$\varphi_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1k} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2k} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdot & a_{kk} & f_k \\ f_1 & f_2 & \cdot & f_k & f \end{vmatrix},\quad \varphi_0=f.$$

とすれば，Sylvester の定理によって
$$A_{k-1}\varphi_k=A_k\varphi_{k-1}-X_k^2,$$
したがって

$$\frac{\varphi_{k-1}}{A_{k-1}}-\frac{\varphi_k}{A_k}=\frac{X_k{}^2}{A_{k-1}A_k}.$$

$k=1,2,\cdots,n$ として加え，$\varphi_n=0$ を用いて問題の等式を得る．

§ 65. 直　交　変　形

1.　n 個の変数の平方の和 $\sum_{\mu=1}^{n}x_\mu{}^2$ を同じく平方の和 $\sum_{\mu=1}^{n}x_\mu'^2$ に変形するような，実係数の一次変形

$$(x)=P(x')$$

を**直交変形**という．

解析幾何学において，一つの直交軸から同原点の他の直交軸に移る場合における座標の変換は，直交変形である．上記は，この幾何学的変換を n 次元に拡張したもので，直交変形という称呼も，それに基づくのである．

直交変形の係数を $p_{\mu\nu}$ で表わして

$$x_\mu=p_{\mu1}x_1'+p_{\mu2}x_2'+\cdots+p_{\mu n}x_n'$$
$$(\mu=1,2,\cdots,n)$$

とする．しからば，上の定義によって次の恒等式が成り立つ．

$$\sum_{\mu=1}^{n}(p_{\mu1}x_1'+p_{\mu2}x_2'+\cdots+p_{\mu n}x_n')^2\equiv\sum_{s=1}^{n}x_s'^2.$$

ゆえに

$$\sum_{\mu=1}^{n}p_{\mu\alpha}{}^2=1,\qquad \sum_{\mu=1}^{n}p_{\mu\alpha}p_{\mu\beta}=0.\qquad (\alpha\neq\beta)\qquad (1)$$

すなわち直交変形の係数の行列 P において，各列の組成分子の平方の和は 1 に等しく，また二つの異なる列の同番号の組成分子の積の和は 0 に等しい．

このような関係は定理 9.3 によって，かつ行列の記法を応用するときに，次のようにははなはだ明白になる．

平方の和 $\sum x_\mu{}^2$ は係数が単位行列 E なる二次形式である．ゆえに定理 9.3 によれば，直交行列（直交変形の係数の行列）P の定義を次のようにしるすことができる．

$$P'EP=E,$$

あるいは

$$P'P=E. \tag{2}$$

この結合を実行すれば，上の等式（1）が出る．

Kronecker にしたがってEの組成分子を $\delta_{\alpha\beta}$ で表わす．すなわち $\delta_{\alpha\alpha}=1$, $\delta_{\alpha\beta}=0$ $(\alpha\neq\beta)$．しからば（1）を次のようにしるすことができる．

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\alpha}p_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{1*}$$

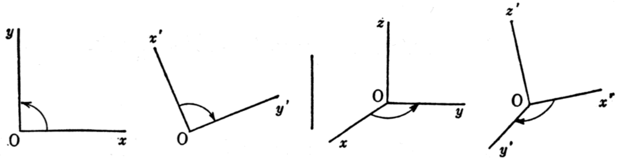
また（2）から

$$|P|^2=1.$$

ゆえに直交行列式は ±1 に等しい．

この ±1 の符号にしたがって，直交行列を正式の直交行列と非正式の直交行列とに区別する．

解析幾何学で，直交軸の変更から生ずる座標の直交変形は直交軸の向きが同一であるか，反対であるかにしたがって，正式または非正式の直交変形である（次の図は反対の向きを示す）．



また（2）によれば，Pの逆行列が転置行列 P' である，

$$P'=P^{-1}. \tag{3}$$

ゆえに

$$PP'=E.$$

または

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\alpha\mu}p_{\beta\mu}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

すなわち直交行列では，列の代わりに行を取って見ても，各行の組成分子の

平方の和が1に等しく，二つの行の同番号の組成分子の積の和は0に等しい．

また（3）から次の結果を得る．

$$P_{\mu\nu}=\pm p_{\mu\nu}.$$

$P_{\mu\nu}$ は P における $p_{\mu\nu}$ の余因数で，±は $|P|=\pm 1$ の符号そのものである．

上記は直交行列の性質であるが，これから述べようとすることは実係数の二次形式を直交変形によって標準形式にするという問題である．すなわち解析幾何学における古典的の問題の n 次元への拡張である．

§ 66.　二次形式の固有方程式，固有値

1．　変数 n 個の実二次形式 $f=A(x,x)=\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ を直交変形

$$(x)=P(X) \tag{1}$$

によって標準形式

$$\rho_1 X_1^2+\rho_2 X_2^2+\cdots+\rho_n X_n^2 \tag{2}$$

に変形しようというのが，われわれの問題であるが，仮りにこのような変形が可能であるとするならば，ρ を任意の係数とするとき，直交変形（1）によって二次形式

$$\sum a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu-\rho\sum x_\mu^2$$

は

$$\sum_{\mu=1}^{n}\rho_\mu X_\mu^2-\rho\sum_{\mu=1}^{n}X_\mu^2$$

に変形されるであろう．しからば，これらの二次形式の判別式の間には

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_1-\rho & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \rho_2-\rho & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \rho_n-\rho \end{vmatrix}\cdot|P|^2$$

$$=(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)\cdots\cdots(\rho_n-\rho) \tag{3}$$

なる関係が成り立たねばならない（$|P|^2=1$）．

左辺の行列式は ρ に関する n 次の多項式である．これを $\varphi(\rho)$ とおく．$\varphi(\rho)$

は二次形式 $A(x,x)$ または対称行列 A の**固有多項式**，$\varphi(\rho)=0$ は**固有方程式**と称するものである．

さて上の等式（3）は ρ の任意の値に対して成り立つのであるから

$$\varphi(\rho)=(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)\cdots(\rho_n-\rho)$$

は ρ に関する恒等式である．したがって $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ は固有方程式の根である．$\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ を行列 A（または二次形式 f）の**固有値**という．

二次形式 f が直交変形によって標準形式（2）に変形されるとするならば，（2）における係数 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ は固有値でなければならない．

本節ではまず，$\varphi(\rho)$ の根がすべて実数であることを証明する．

〔**定理 9.11**〕 n 次の対称行列 $A=[a_{\mu\nu}]$ の組成分子が実数であるとき，固有方程式 $\varphi(\rho)=|a_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}\rho|=0$ は実根のみをもつ．

$\rho=\rho_0$ が $\varphi(\rho)$ の k 重根であるときには，ρ_0 を ρ に代入するとき，$\varphi(\rho)$ の行列 $[a_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}\rho_0]$ の位は $n-k$ になる（δ は 308 頁の通り）．

〔**証**〕 この定理ははなはだ有名で，いろいろ証明法がある．次に中で最も簡易な証明を述べる．

ρ_0 を $\varphi(\rho)$ の一つの根とすれば，斉次一次方程式

$$\left.\begin{array}{lllll}(a_{11}-\rho_0)x_1+ & a_{12}x_2 & +\cdot\cdot\cdot+ & a_{1n}x_n & =0,\\ a_{21}x_1 & +(a_{22}-\rho_0)x_2+ & \cdot\cdot\cdot+ & a_{2n}x_n & =0,\\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1}x_1 & +\quad a_{n2}x_2 & +\cdot\cdot\cdot & +(a_{nn}-\rho_0)x_n & =0\end{array}\right\} \qquad (4)$$

が解をもつ．解とはもちろん $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外の解をいう．その解を (x) なる文字で表わすことにして，上の方程式に $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ を掛けて加えるならば（$\bar{x}$ は x の共役複素数），

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\bar{x}_\mu x_\nu=\rho_0\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu\bar{x}_\mu$$

を得る．

右辺において $\sum x_\mu\bar{x}_\mu$ は実数であるが，仮定によって，それは 0 でない．さ

て左辺の和の共役複素数を作れば，$a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}$ に注意して，

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\mu\bar{x}_\nu=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\nu\mu}x_\nu\bar{x}_\mu=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\nu\bar{x}_\mu$$

$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\bar{x}_\mu x_\nu$$

すなわち左辺の和はその共役複素数に等しい．すなわち実数である．ゆえに ρ_0 は実数である．

すなわち $\varphi(\rho)$ は実根のみをもつ．

次に ρ_0 を ρ に代入するとき行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\rho_0 & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho_0 & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\rho_0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

の位が r になるとして $(r<n)$，そのとき ρ_0 が $\varphi(\rho)$ の $n-r$ 重根である．ことを証明する．あるいは $\rho=\rho'+\rho_0$ とおいて変数を ρ' に換えていえば，$\varphi(\rho'+\rho_0)$ が $\rho'=0$ を $n-r$ 重根としてもつことを証明する．

$$\varphi(\rho'+\rho_0)=\begin{vmatrix} (a_{11}-\rho_0)-\rho' & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\rho_0)-\rho' & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & (a_{nn}-\rho_0)-\rho' \end{vmatrix}$$

を ρ' の降冪に展開すれば，仮定によって

$$\varphi(\rho'+\rho_0)=\pm\rho'^n+\cdots\pm C\cdot\rho'^{n-r}$$

を得る．Cは行列（5）における r 次の首座行列式全部の和に等しい．（5）の位が r であると仮定してあるから，$\rho'^{n-r-1},\cdots$ の係数は 0 になるのである．

さて実対称行列（5）の位が r であるから，その r 次の首座行列式の中には 0 に等しくないものがあって，それらはすべて同一の符号をもつ（定理 9.4）．

ゆえに $C\neq 0$. したがって $\rho'=0$ は $\varphi(\rho'+\rho_0)=0$ の $n-r$ 重根である.

換言すれば，$\rho=\rho_0$ が $\varphi(\rho)$ の k 重根ならば $(k=n-r)$，$\rho=\rho_0$ を代入するとき，$\varphi(\rho)$ の行列の位は $n-k$ になる.

§ 67. 直交変形による標準形式への変形

直交変形 P によって二次形式 f が標準形式に変形されるときには，標準形式における係数は f の固有値 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ でなければならない. この標準形式の行列を

$$A_0=\begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \rho_n \end{vmatrix}$$

とおけば，定理9.3によって

$$P'AP=A_0, \tag{1}$$

または　$P'=P^{-1}$ (§65) によって

$$AP=PA_0. \tag{1*}$$

両辺の第1列を比較すれば

$$\sum_{s=1}^{n} a_{1s}p_{s1}=\rho_1 p_{11}, \sum_{s=1}^{n} a_{2s}p_{s1}=\rho_1 p_{21}, \cdots, \sum_{s=1}^{n} a_{ns}p_{s1}=\rho_1 p_{n1}.$$

すなわち P の第1列の組成分子 $p_{11}, p_{21}, \cdots, p_{n1}$ は §66 の方程式（4）において $\rho_0=\rho_1$ とするときの解（x）でなければならない.

同様に，P の第2列の組成分子は $\rho=\rho_2$ に対する解で，以下同様である.

よって $\rho=\rho_1, \rho=\rho_2, \cdots, \rho=\rho_n$ に対する上の解を列として直交行列 P を組み立て得るかどうかの問題が生ずる.

ρ_1, ρ_2 を二つの相異なる固有値とすれば

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\mu s}p_{s1}=\rho_1 p_{\mu 1} \tag{2}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} p_{s2} = \rho_2 p_{\mu 2} \qquad (3)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,n)$$

（2）の両辺に $p_{\mu 2}$ を掛けて $\mu=1,2,\cdots,n$ にわたる和を作れば，

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} p_{s1} p_{\mu 2} = \rho_1 \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu 1} p_{\mu 2}.$$

また（3）の両辺に $p_{\mu 1}$ を掛けて $\mu=1,2,\cdots,n$ にわたる和を作れば，

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s} p_{s2} p_{\mu 1} = \rho_2 \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu 1} p_{\mu 2}.$$

これらの等式における左辺の和は $a_{\mu s}=a_{s\mu}$ のために相等しいから，

$$(\rho_1-\rho_2) \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu 1} p_{\mu 2} = 0.$$

ゆえに $\rho_1 \neq \rho_2$ から

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu 1} p_{\mu 2} = 0. \qquad (4)$$

すなわち（2）の解である $p_{\mu 1}$ を第1列，（3）の解である $p_{\mu 2}$ を第2列におけば，その間に自ら**直交条件**（4）が成立するのである．

各列の組成分子の平方の和を1に等しくすること（すなわち**標準化**）は，適当な比例因数を乗ずることによって出来る．

よって n 個の固有値 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ が互いに相異なるときは，それらに対応する（2），（3）などの解で直交行列 P を組み立てて（1*）を満足させることができる．P が直交行列ならば，$P'=P^{-1}$ だから，（1）が成り立ち，すなわち標準形式への変形が出来るのである．

$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ の中に相等しいものがあるとき，たとえば ρ_1 が固有多項式 $\varphi(\rho)$ の k 重根であるときには，$\rho=\rho_1$ に対応して $\varphi(\rho_1)$ の行列の位が $n-k$ になる（定理，9.11）から，（2）は k 個の互いに独立な解をもつ．この場合

には，これらの k 個の解の間に直交条件を成立させることができるのである．

いま

$$(p^{(\kappa)}) \ : \ p_1^{(\kappa)}, p_2^{(\kappa)}, \cdots, p_n^{(\kappa)} \qquad (\kappa=1,2,\cdots,k)$$

を互いに独立な解とする．

$(p^{(1)})$ と $(p^{(2)})$ との間に直交条件が成り立たないときには，乗数 λ を適当に定めて $(p^{(2)}+\lambda p^{(1)})$，すなわち

$$p_1^{(2)}+\lambda p_1^{(1)}, p_2^{(2)}+\lambda p_2^{(1)}, \cdots, p_n^{(2)}+\lambda p_n^{(1)}$$

を $(p^{(2)})$ に代用して，直交条件

$$\sum_{s=1}^{n} p_s^{(1)}(p_s^{(2)}+\lambda p_s^{(1)})=0$$

を成り立たせることができる．すなわち λ を

$$\sum p_s^{(1)}p_s^{(2)} + \lambda \sum (p_s^{(1)})^2=0$$

から定めればよい（$\sum(p_s^{(1)})^2 \neq 0$）．

このようにして，直交条件を満足させる二つの解が得られたとすると，それらを $(p^{(1)})$，$(p^{(2)})$ とする．もしも $k>2$ ならば $(p^{(1)})$，$(p^{(2)})$ とは独立な第三の解 $(p^{(3)})$ を取って

$$p^{(3)}+\lambda p^{(1)}+\mu p^{(2)}$$

において乗数 λ，μ を適当に定めて，$(p^{(1)})$ および $(p^{(2)})$ に対して直交条件を成立させることができる．すなわち

$$\sum_{s=1}^{n} p_s^{(1)}(p_s^{(3)}+\lambda p_s^{(1)}+\mu p_s^{(2)})=0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_s^{(2)}(p_s^{(3)}+\lambda p_s^{(1)}+\mu p_s^{(2)})=0.$$

から

$$\sum p_s^{(1)} p_s^{(3)} + \lambda \sum (p_s^{(1)})^2=0,$$

$$\sum p_s^{(2)} p_s^{(3)} + \mu \sum (p_s^{(2)})^2 = 0.$$

これから λ, μ を求めるのである.

このように進んで k 個の解を求めて，それら相互の間に直交条件を成り立たせることができる．それらを標準化（適当な比例定数を掛けて，平方の和を1に等しくすること）して P の k 個の列とするのである.

§ 68. Hermite の二次形式

1. Hermite の二次形式，あるいは単に **Hermite の形式** (Hermitian form) というのは

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{\mu=\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu, \qquad a_{\nu\mu} = \bar{a}_{\mu\nu}$$

のような式である．文字の上の横線は共役複素数を示す．すなわち係数の行列 $A = [a_{\mu\nu}]$ において，第一対角線に関して互いに対称な位置にある組成分子 $a_{\mu\nu}, a_{\nu\mu}$ は互いに共役な複素数で，特に第一対角線上の組成分子 $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ はそれ自身と共役，すなわち実数である.

このような行列を，本書では，仮りに ***H* 行列**と略称する．よってまた Hermite の形式を ***H* 形式** と略称する.

H 形式 $A(x, \bar{x})$ は変数の任意の値に対して常に実数値を有する．実際，$A(x, \bar{x}) = \sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ の共役複素数は

$$\bar{A}(x, \bar{x}) = \sum \bar{a}_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu = \sum a_{\nu\mu} \bar{x}_\mu x_\nu = A(x, \bar{x}).$$

同様に行列式 $|A|$ は実数値をもつ.

H 形式において係数 $a_{\mu\nu}$ が実数ならば，$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$．また変数が実数値のみを取るならば，$\bar{x}_\nu = x_\nu$．すなわちこの場合には，H 形式は実二次形式にほかならないのである．ゆえに H 形式は実二次形式の拡張である.

§ 60～61 において実二次形式に関して述べたことは，相当の変更を行なって，すべて H 形式にも当てはめることができる.

まず一次変形に関していえば，$A(x, \bar{x})$ を変数 (x), $(\bar{x})$ に関する二重一

次形式と見れば，(x) に $P(x')$ なる一次変形を行なうときには，$(\bar{x})$ には共役複素数を係数とする一次変形 $(\bar{x})=\overline{P}(\bar{x}')$ を行なうべきである．すなわち

$$P=[p_{\alpha\beta}] \quad \text{ならば，} \quad \overline{P}=[\overline{p}_{\alpha\beta}].$$

ゆえに原 H 形式の係数の行列を A とすれば，変形後の行列は

$$P'A\overline{P}$$

である．よって H 形式の位（それは行列 A の位をいう）は正則な一次変形によっては不変である．

H 行列においても，位が r であるとき，r 次の首座行列式の中に 0 にならないものがある．その証明は定理 9.4 とまったく同様にしてできる（294 頁 C^2 のところが $\overline{C}C$ になる）．

H 行列の首座行列式にあっては，その行列がやはり H 行列であるから，首座行列式は実数値をもつ．位が r ならば，r 次の首座行列式の中で 0 にならないものは，全部同一の符号をもつ．

位が r である H 形式は標準形式

$$a_1X_1\overline{X}_1+a_2X_2\overline{X}_2+\cdots+a_rX_r\overline{X}_r$$

に変形される．係数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ は実数である．

もしも係数の正負を区別するならば，標準形式を

$$X_1\overline{X}_1+X_2\overline{X}_2+\cdots+X_P\overline{X}_P-X_{P+1}\overline{X}_{P+1}-\cdots-X_{P+N}\overline{X}_{P+N}$$

とすることができる．正項および負項の数 P, N は一定である．すなわち H 形式に関して惰性律が成り立つのである．

H 形式においても定符号，不定符号の区別が可能である．

標準形式において $P=n$ または $N=n$ の場合がそれぞれ正の H 形式，負の H 形式である．

これらの点に関しては，§ 62〜64 に述べたことを，一々 H 形式について験証して見ることを読者にこうのである．

2.　最後に述べるべきことは，実二次形式における直交変形を拡張して，H 形式に適応させることである．

H 形式

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n$$

の形を不変とするような一次変形を P とすれば

$$P'=\overline{P}E,$$

すなわち

$$\sum_{s=1}^{n} p_{s\mu}\overline{p}_{s\nu}=\delta_{\mu\nu}.$$

$\delta_{\mu\nu}$ は §65 にいった Kronecker の記号である．すなわち $\delta_{\mu\mu}=1, \delta_{\mu\nu}=0$ $(\mu\neq\nu)$.

すなわち P の各列の組成分子の絶対値の平方の和は 1 に等しい．また P の二つの（相異なる）列に関しては一つの列の各組成分子に他の列の同番号の組成分子の共役複素数を乗じた積の和は 0 に等しい（拡張された直交条件）.

この場合には P の行列式を $\varDelta$ とすれば $\overline{P}'$ の行列式は $\overline{\varDelta}$ に等しいから $\varDelta\overline{\varDelta}=1$. ゆえに $\varDelta$ の絶対値は 1 に等しい：$|\varDelta|=1$.

上のような行列 P を unitary という.

unitary は行列式 $\varDelta$ の絶対値が 1 に等しいことを示唆するための造語であろう．本書では仮りに **U 行列，U 変形**などとしるしておく.

称呼はとも角も，問題は実二次形式を直交変形によって標準形式に化するように，H 形式を U 変形によって標準形式にすることができるというのである.

H 形式 $A(x,\bar{x})=\sum a_{pq}x_p\bar{x}_q$ が U 変形 $(x)=P(X)$. よって標準形式

$$\rho_1X_1\overline{X}_1+\rho_2X_2\overline{X}_2+\cdots+\rho_nX_n\overline{X}_n$$

に変形されるならば，任意の乗数 ρ に対して

$$A(x,\bar{x})-\rho\sum_{p=1}^{n}x_p\,\bar{x}_p=\sum_{p=1}^{n}(\rho_p-\rho)X_p\overline{X}_p,$$

したがって

$$\varphi(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)\cdots(\rho_n-\rho)$$

($\overline{P}'P=E$, $|\overline{P}'|\cdot|P|=1$ に注意)

この場合にも標準形式における係数 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ は A の固有多項式 $\varphi(\rho)$ の根でなければならない.

$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ をやはり H 行列 A の固有値という.

これらの固有値が実数であることは定理9.11とまったく同様にして証明される. かつまた $\rho=\rho_1$ が固有多項式 $\varphi(\rho)$ の k 重根ならば, $\varphi(\rho_1)$ の行列の位は $n-k$ になる.

これによって H 形式 $A(x, \bar{x})$ を標準形式に変形する U 変形が可能であることが §67 とまったく同様にして証明されるのである.

〔**問題 1**〕 行列式 $|a_{pq}|$ $(p, q=1, 2, \cdots, n)$ において $a_{pq}=-a_{qp}$, $(a_{pp}=0)$ なるときは, それを**歪対称**行列式という.

奇数次の歪対称行列式は0に等しく, 偶数次のものは完全平方式である.

〔解〕 Aを歪対称行列式とすれば, 各行の符号を変えるとき, 行列が転置される. ゆえに次数nが奇数ならば, $A=-A$, したがって $A=0$. 次数nが偶数ならば, $n=2$ のとき $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}=a^2$ は完全平方式である. よって数学的帰納法を用いる.

$$A^{(n)}\begin{pmatrix}12\cdots n\\12\cdots n\end{pmatrix} A^{(n+2)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+1, n+2\\12\cdots n, n+1, n+2\end{pmatrix}$$

$$=A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+1\\12\cdots n, n+1\end{pmatrix} A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+2\\12\cdots n, n+2\end{pmatrix} -A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+1\\12\cdots n, n+2\end{pmatrix} A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+2\\12\cdots n, n+1\end{pmatrix}$$

(n), $(n+1)$ などは行列式の次数を示すのである. $n+1$ が奇数であるから, 右辺第一項の行列式は0, また第二項において

$$A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+1\\12\cdots n, n+2\end{pmatrix}=-A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+2\\12\cdots n, n+1\end{pmatrix}.$$

したがって,

$$A^{(n)} A^{(n+2)}=\left[A^{(n+1)}\begin{pmatrix}12\cdots n, n+1\\12\cdots n, n+2\end{pmatrix}\right]^2.$$

すなわち $A^{(n)}$ が完全平方であるならば, $A^{(n+2)}$ も完全平方である.

たとえば

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c' & ' \\ -b & -c' & 0 & a' \\ -c & -b' & -a' & 0 \end{vmatrix}=(aa'-bb'+cc')^2.$$

〔**問題 2**〕 歪対称行列式の位が r ならば, r 次の首座行列式の中に0に等し

くないものがある（rは偶数である）.

〔解〕 定理 9.4 と同様.

〔問題 3〕 歪対称行列式 A の組成分子が実数ならば，その固有方程式 $|a_{pq}-x\delta_{pq}|=0$ の根は純虚数（または0）である.

〔解〕 定理 9.11 と同様.

〔問題 4〕 行列 A において $a_{pq}=-\bar{a}_{qp}$ ならば，その固有方程式の根は純虚数（または0）である.

〔解〕 前と同様. 問題 3 はこれの特別の場合である.

〔問題 5〕 直交行列Pにおける任意の小行列式は $\pm 1\times$ 余因数に等しい. $\pm$ は $|P|=\pm 1$ の $\pm$ と同じである.

〔解〕 $P^{-1}=P'$ を用いて定理 8.20 による. 以下この問題の応用.

〔問題 6〕 直交行列 $P=[p_{\alpha\beta}]$ の固有方程式 $\varphi(x)=|p_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}x|=0$ は逆数方程式である.

〔問題 7〕 $n=3$, $|P|=1$ ならば，$x=1$ が固有方程式の根である. もしも $x=-1$ が固有方程式の根ならば，$p_{11}+p_{22}+p_{33}=-1$ で，$x=-1$ は二重根である.

〔問題 8〕 直交行列Pにおいて，$|P|=-1$ ならば，$x=-1$ が固有方程式の根である.

§ 69. 行列式の絶対値の評価

〔定理 9.12〕 n 次の行列式 $\varDelta$ において，各組成分子の絶対値は M 以下であるとする. しからば $\varDelta$ の絶対値に関して次の関係がある.

$$|\varDelta|\leqq\sqrt{n^n}M^n.$$

(Hadamard の定理).

〔解説〕 各組成分子の絶対値が M 以下ならば，行列式 $\varDelta$ の各項の絶対値は M^n 以下である. 項数は $n!$ であるから $\varDelta$ の絶対値は $n!\,M^n$ 以下である. すなわち $|\varDelta|\leqq n!\,M^n$. これは粗雑な評価であるが，上の定理では M^n の乗数として$n!$ の代わりに $\sqrt{n^n}$ が出ている. $n!$ も $\sqrt{n^n}$ も n が大きくなるにしたがって限りなく単調に増大するが，前者は後者とは比較にならない急速度で増大する.

$$\frac{n!}{\sqrt{n^n}} \sim \left(\frac{\sqrt{n}}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

Hadamard は上の定理を 1893 年に得ていたのであるが，十年後に積分方程式論において応用されてから，この定理が有名になって，いろいろの証明法が各方面から提出された．ここでは二次形式論を応用する一つの方法を述べる．

定理 9.12 は次の定理 9.13, 9.14 から導かれる．

〔**定理 9.13**〕 行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

において，各列の組成分子の絶対値の平方の和を順次に $S_1, S_2, \cdots, S_n$ とする．すなわち

$$S_k=\sum_{\mu=1}^{n} |a_{\mu k}|^2=\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu k}\bar{a}_{\mu k}$$

とおく．しからば

$$|\Delta| \leqq \sqrt{S_1 S_2 \cdots S_n}\,.$$

等号は相異なる二つの列の間に直交条件

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu h}\bar{a}_{\mu k}=0 \qquad (h \neq k)$$

が成り立つときに限る．

実際，M が定理 9.12 における意味をもつときには $S_k \leqq nM^2$．ゆえに上の定理 9.13 から $|\Delta| \leqq \sqrt{(nM^2)^n}=\sqrt{n^n}\cdot M^n$．すなわち定理 9.12 が得られる．

〔**定理 9.14**〕 定符号の，しかも正なる H 形式 $A(x,\bar{x})=\sum a_{\mu\nu}x_\mu \bar{x}_\nu$ の判別式 A は，その首項よりも大きくなることはない（もちろん $A>0$ である）．

$$A \leqq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

等号は H が標準形式であるとき，すなわち $a_{\mu\nu}=0$ $(\mu \neq \nu)$ であるときに限る．

〔証〕 $A_0=1, A_1, A_2, \cdots, A_n$ を首座の行列式とすれば，それらはみな正であって，かつ A_k は正なる H 形式 $\sum a_{\mu\nu}x_\mu\bar{x}_\nu(\mu,\nu=1,2,\cdots,k)$ の係数の行列式である．さて

$$A=A_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{nn}A_{n-1}+\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdot & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdot & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n1} & \cdot & a_{n,n-1} & 0 \end{array}\right|. \qquad (1)$$

A_{n-1} は正なる H 形式 $A_{n-1}(x,\bar{x})=\sum a_{\mu\nu}x_\mu\bar{x}_\nu$ $(\mu,\nu=1,2,\cdots,n-1)$ の判別式であって，$A_{n-1}(x,\bar{x})$ の逆形式

$$F_{n-1}(u,\bar{u})=-\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1,n-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & & \cdot & a_{n-1,n-1} & u_{n-1} \\ \bar{u}_1, & \cdot & \cdot & \bar{u}_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

は正なる H 形式である（§64，問題 1）．

ゆえに $F_{n-1}(u,\bar{u})$ において $u_1=a_{1n}$，$u_2=a_{2n},\cdots,u_{n-1}=a_{n-1,n}$（したがって $\bar{u}_1=a_{n1},\bar{u}_2=a_{n2},\cdots,\bar{u}_{n-1}=a_{n,n-1}$）とおくとき，その値は正であるが，ただ $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$ のときに限って 0 である．

ゆえに（1）から

$$A_n\leqq a_{nn}A_{n-1}.$$

同じように

$$A_{n-1}\leqq a_{n-1,n-1}A_{n-2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_1=a_{11}.$$

ゆえに

$$A_n \leqq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

で，等号は上の各関係において $=$ を取るべきときに限る．すなわち A_n の第一対角線以外の各組成分子が0であるときに限る．

定理9.14から定理9.13（したがって定理9.12）を得ることは容易である．

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

において，

$$[h,\overline{k}]=\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu h}\bar{a}_{\mu k}$$

とおく．しからば

$$[h,\overline{h}]=\sum_{\mu=1}^{n}|a_{\mu h}|^2=S_h$$

はすなわち定理9.12の S_h である．

さて $\varDelta'\cdot\overline{\varDelta}$ なる行列の結合の結果は

$$|\overline{\varDelta}|^2=\begin{vmatrix} [1,\overline{1}] & [1,\overline{2}] & \cdot & [1,\overline{n}] \\ [2,\overline{1}] & [2,\overline{2}] & \cdot & [2,\overline{n}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [n,\overline{1}] & [n,\overline{2}] & \cdot & [n,\overline{n}] \end{vmatrix} \qquad (2)$$

しかるに $\varDelta'\overline{\varDelta}=\varDelta'E\overline{\varDelta}$ は正なる H 形式の行列である（正なる H 形式 $\sum x_\mu \bar{x}_\mu$ の一次変形）．ゆえに定理9.14によって上の（2）から

$$|\overline{\varDelta}|^2 \leqq [1,\overline{1}]\cdot[2,\overline{2}]\cdots[n,\overline{n}]=S_1S_2\cdots S_n,$$

すなわち定理9.13である．

§ 70. Gram の行列式, Wronski の行列式

1. 定符号の二次形式の応用として Gram の行列式を挙げることができる. $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ を区間 $a \leqq x \leqq b$ において連続な x の実函数とする. もしもこの区間 $a \leqq x \leqq b$ において

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

であるような定数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (「すべて 0」ではない) が存在するならば, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ において一次的に独立でない (一次的関係をもつ) という. またそのような定数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在しないならば, 一次的に独立である (一次的関係をもたない) という.

このような意味において, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が一次的に独立であるか, ないかの判定条件は次のようにして求められる. いま

$$a_{\mu\nu} = \int_a^b f_\mu(x) f_\nu(x)\, dx \qquad (1)$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n)$$

とおけば,

$$A(u, u) \equiv \int_a^b (u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \cdots + u_n f_n(x))^2 dx \qquad (2)$$

$$= \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n)$$

は変数 (u) の二次形式である $(a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$.

この二次形式の判別式

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ および区間 $a \leqq x \leqq b$ に関する **Gram の行列式** という. その組成分子 $a_{\mu\nu}$ は上の (1) の積分である.

さて二次形式 $A(u,u)$ は変数 (u) の任意の実数値に対して，決して負の値を取らない．それは（2）からの帰結である．

（2）における被積分函数は仮定によって x の連続函数で，かつ決して負にはならないのであるから，（2）が 0 になるのは，被積分函数が積分区間 $a\leqq x\leqq b$ において常に0に等しい場合に限る．

ゆえに，いま (u) にある定数値 (c) を与えたとするとき，

$$A(c,c)=0$$

になるのは，区間 $a\leqq x\leqq b$ において，常に

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

であるときに限る．このような関係が $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ のときに限って成り立つのは，すなわち上の意味において $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ が一次的に独立であるのであるが，そのときには二次形式 $A(u,u)$ は正の二次形式で，したがって判別式 $G>0$ である．

しかるにもしも $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ が一次的に独立でないならば，二次形式 $A(u,u)$ は $u_1=u_2=\cdots=u_n=0$ 以外の (u) のある値 (c) に対して0になるから，それは低位の二次形式でなければならない．したがって $G=0$ である．

ゆえに次の定理を得る．

〔**定理 9.15**〕 区間 $a\leqq x\leqq b$ において連続函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ の間に一次的関係があるために必要かつ十分な条件は，Gram の行列式が0に等しいことである．すなわち

$$G=0.$$

（G は常に $\geqq 0$. ゆえに $G>0$ は $f_1,f_2,\cdots,f_n$ が $a\leqq x\leqq b$ において一次的に独立であることの条件である）．

2. $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ は $n-1$ 回まで微分可能であるとすれば，それらの連続函数が区間 $a\leqq x\leqq b$ において一次的に独立でなくて

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

のような関係が成り立つとき，

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_n f_n'(x) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0.$$

$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ でなくて，このような関係が区間 $a \leqq x \leqq b$ において成り立つから（定理 8.9），

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdot & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdot & f_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdot & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

このような行列式 $W(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ を $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ に関する **Wronski の行列式**という．

すなわち $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ が微分可能の条件のもとにおいて，区間で一次的に独立でないためには，この区間において，常に

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0$$

であることが必要である．

しからば，これは十分な条件であるか．

区間 $a \leqq x \leqq b$（それを I と名づける）において常に

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0 \tag{1}$$

であると仮定する．

なおこの区間において，常に

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}) \neq 0 \tag{2}$$

と仮定すれば，方程式

$$\left.\begin{aligned} K_1 f_1 + K_2 f_2 + \cdots + K_{n-1} f_{n-1} &= f_n, \\ K_1 f_1' + K_2 f_2' + \cdots + K_{n-1} f'_{n-1} &= f_n', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ K_1 f_1^{(n-2)} + K_2 f_2^{(n-2)} + \cdots + K_{n-1} f_{n-1}^{(n-2)} &= f_n^{(n-2)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

から，Cramer の法則によって，区間 I において連続的な x の函数 $K_1, K_2, \cdots,$ K_{n-1} が決定される．これらは（2）を分母とし，分子はそれぞれ（2）にお

いて $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ およびその $n-2$ 次までの導函数を f_n およびその導函数でおき換えた行列式に等しい．さて仮定によって $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の $n-1$ 次の導函数が可能であるから，$K_1, K_2, \cdots, K_{n-1}$ は微分可能である．

よって（3）の第一式から

$K_1'f_1+K_2'f_2+\cdots+K'_{n-1}f_{n-1}+(K_1f_1'+K_2f_2'+\cdots+K_{n-1}f'_{n-1})=f_n'$ これを（3）の第二式と比較して

$$K_1'f_1+K_2'f_2+\cdots+K'_{n-1}f_{n-1}=0,$$

同様に

$$K_1'f_1'+K_2'f_2'+\cdots+K'_{n-1}f'_{n-1}=0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$K_1'f_1^{(n-2)}+K_2'f_2^{(n-2)}+\cdots+K'_{n-1}f_{n-1}^{(n-2)}=0.$$

ただし最後の等式は次のようにして得られる．$W(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ の行列式の第 $1, 2, \cdots, n-1$ 列に $K_1, K_2, \cdots, K_{n-1}$ を掛けて最後の列から引いて，（3）を用い

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})(f_n^{(n-1)}-K_1f_1^{(n-1)}-\cdots-K_{n-1}f_{n-1}^{(n-1)})=0$$

を得る．そこで（2）によって，最後の等式が得られるのである．

よって（2）から（定理8.9）

$$K_1'=K_2'=\cdots=K'_{n-1}=0.$$

すなわち $K_1, K_2, \cdots, K_{n-1}$ は定数である．

これらの定数の中に0に等しくないものがあるならば，（3）の第一式によって $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間に一次的関係があるのであるが，もしまた $K_1, K_2 \cdots, K_{n-1}$ は全部0に等しいならば，f_n は区間Iにおいて常に0に等しいのである．この場合にも，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間に一次的関係があるといってよい．$C_1f_1+C_2f_2+\cdots+C_nf_n=0$ が $C_1=C_2=\cdots=C_{n-1}=0$，$C_n\neq 0$ として成り立つからである．

上記は（2）という仮定からの帰結である．もしも（2）が成り立たないで，区間Iにおける x のある値 $x=x_0$ に対して

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})=0$$

であるときには，区間Iにおいて $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間に一次的の関係があると断言することができない．

簡単のために $W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ は $x=x_0$ において0になるほかは区間 $a \leqq x \leqq b$ において決して0にならないとして見よう.

しからば, 上の通り $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間には

$a \leqq x \leqq x_0$ において

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_n f_n = 0,$$

また $x_0 \leqq x \leqq b$ において

$$C_1' f_1 + C_2' f_2 + \cdots + C_n' f_n = 0$$

のような関係があるが, もしも定数因子 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ と $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ とが互いに比例しないならば, これは区間 I における $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間の一次的関係とはいわれない. 定数因子が x_0 の左右である二つの小区間において同一でないことは可能である. たとえば, 行列

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdot & \cdot & f_{n-1}(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdot & \cdot & f'_{n-1}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-2)}(x_0) & f_2^{(n-2)}(x)_0 & \cdot & \cdot & f_{n-1}^{(n-2)}(x_0) \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdot & \cdot & f_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

の位が $n-1$ より小さいときには, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ 以外に

$$\begin{aligned} &\lambda_1 f_1(x_0) + \lambda_2 f_2(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x_0) = 0, \\ &\lambda_1 f_1'(x_0) + \lambda_2 f_2'(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f'_{n-1}(x_0) = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\lambda_1 f_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 f_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

なる定数がある. よって

$$\lambda_1 = c_1 - c_1', \ \lambda_2 = c_2 - c_2', \cdots, \lambda_{n-1} = c_{n-1} - c'_{n-1}$$

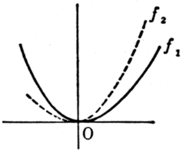
として,

$$a \leqq x \leqq x_0 \ \text{では} \ f_n(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(x)$$

$$x_0 \leqq x \leqq b \ \text{では} \ f_n(x) = c_1' f_1(x) + c_2' f_2(x) + \cdots + c'_{n-1} f_{n-1}(x)$$

とおくならば, $f_n(x)$ は $x=x_0$ においても連続でかつ $x=x_0$ において $f_n(x)$ が $n-1$ 回まで微分可能で全区間 I において $W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0$ である.

たとえば $n=2$ のとき，区間 $-1\leqq x\leqq 1$ の中，$x=0$ において $f_1(0)=f_1'(0)=0$ で，その他は $f_1(x)\neq 0$ とするとき，$-1\leqq x\leqq 0$ では $f_2(x)=\frac{1}{2}f_1(x)$，$0\leqq x\leqq 1$ では $f_2(x)=2f_1(x)$ とすれば，$f_2'(0)=0$ で，$-1\leqq x\leqq 1$ において



$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x) & \frac{1}{2}f_1(x) \\ f_1'(x) & \frac{1}{2}f_1'(x) \end{vmatrix} \quad \text{または} = \begin{vmatrix} f_1(x) & 2f_1(x) \\ f_1'(x) & 2f_1'(x) \end{vmatrix}$$
$$=0.$$

x_0 のように $W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ を 0 とする点が区間 I に沢山あれば，それらを分界とする各小区間において，それぞれ相異なる定数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ をもって $c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n=0$ が成り立つこともある．また $W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ が区間 I において無限に多くの 0 点をもつ場合もある．

$W(f_1, f_2, \cdots, f_n)=0$ なる仮定のもとにおいて $x=x_0$ なる一つの点で

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})\neq 0 \qquad (4)$$

ならば，連続性のために x_0 を含むある区間 I_0 において，（4）が常に成り立ち，したがってその区間内においては $f_1, f_2, \cdots, f_n$ の間に一次的関係

$$C_1f_1+C_2f_2+\cdots+C_nf_n=0$$

が確かに成り立つ．よってもしも $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が解析的函数であるならば，この一次的関係はそれらの解析的函数の全成立範囲において成り立つ．ゆえに解析的函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ に関しては，次の簡明な結論を得る．

ある区間において，解析的函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ に関する Wronski の行列式 $W(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ が常に 0 ならば，それらの函数の成立範囲を通じて，上のような一次的関係が成り立つ．

もしもすでに $W(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})=0$ ならば，$f_n(x)$ を除外して考えるのである．

（一次的関係の定義が n 個の函数全部が実際に参加することを要求していないことに注意することを要する）．

§ 71. 行 列 算

1. 二次形式論などにおける必要上から**行列算**なるものが生れ出でて，現今数学の各所に応用されるに至った．次にその大要を述べる．

行列算では，行列そのものを計算の目的物にするのであって，それは行列式の計算とは違う．

ここでは簡単のために正方行列のみに関していう．

$A, B, \cdots$をn行n列の行列とするとき，

$$A+B$$

はAおよびBにおける同位置の組成分子の和をその同位置の組成分子とする行列であるとする．これが行列の加法である．すなわちA, Bにおける組成分子をa_{pq}, b_{pq}として，

$$A=[a_{pq}],\ B=[b_{pq}] \qquad \begin{pmatrix} p=1,2,\cdots,n \\ q=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}$$

のように略記すれば，

$$A+B=[a_{pq}+b_{pq}].$$

加法の意味をこのように規約すれば，行列の加法は結合法則および交換法則に従うことは明白である．

また減法を加法の逆とすれば，それは一意的で，特に$A-A$はすべての組成分子が0である行列である．この行列を〔0〕または単に0で表わすことにする．二つの行列が相等しいというのはその差が〔0〕になる場合に限ることにする．すなわち同位置の組成分子がすべて相等しい場合のみである．

2. 行列の乗法は行列の結合（§53）であると規約する．しからば行列の乗法は結合の法則には従うけれども，交換の法則は一般的には成り立たない．

上の記法によれば

$$[a_{pq}][b_{pq}]=\left[\sum_{\sigma=1}^{n} a_{p\sigma} b_{\sigma q}\right]$$

$$[a_{pq}][b_{pq}][c_{pq}]=\left[\sum_{\sigma,\tau=1}^{n} a_{p\sigma}\, b_{\sigma\tau} c_{\tau q}\right]$$

また
$$([a_{pq}]+[b_{pq}])\cdot[c_{pq}]=\left[\sum(a_{p\sigma}+b_{p\sigma})\,c_{\sigma q}\right]$$
$$=\left[\sum a_{p\sigma} c_{\sigma q}\right]+\left[\sum b_{p\sigma} c_{\sigma q}\right]$$

すなわち

$$(A+B)C=AC+BC,$$

同じように

$$C(A+B)=CA+CB.$$

これがすなわち分配の法則である．

〔注意〕 $A=[a_{pq}]$ とするとき，$\lambda A=[\lambda a_{pq}]$，$-A=[-a_{pq}]$ とする．

3. 行列の乗法が交換の法則に従わないところから，除法に二つの場合が生ずる．

行列 A, B が与えられたとき

$$AX=B \qquad \text{または} \qquad YA=B$$

なる行列 X, Y を求めるのを，それぞれ**左除法**，**右除法**という．これらの除法が常に可能であるとはいわれず，また可能でも，左除法と右除法とでは結果が違うものと思わねばならない．

行列 A の行列式（それを $|A|$ としるす）が0に等しくないときには，左除法も右除法も一意的に可能である．

それを説明するに先だって，行列の乗法単位に関して述べる．

第一対角線上に1をおいて，その他の組成分子は0とすれば**単位行列**（§55）

$$E=[\delta_{pq}]$$

を得る．すなわち $\delta_{pp}=1$，$\delta_{pq}=0$ $(p\neq q)$ である．しからば，Aが任意の行列であるとき

$$AE=EA=A$$

になる．

逆に，すべての行列 A に関して，このような性質をもつ行列はEに限る．

いま任意の A に関して $AX=A$ ならば，特に $A=E$ とするとき $EX=E$ すなわち $X=E$．同様に $YA=A$ が $A=E$ に関しても成り立つとき，$Y=E$．

E がすなわち行列の乗法における**乗法単位**（数の乗法における 1 に該当するもの）である．

行列 A において，行列式 $|A|$ が 0 に等しくない場合に逆行列 A^{-1} が存在することは §55 に述べた．それは

$$AA^{-1}=E,\qquad A^{-1}A=E$$

なる行列 A^{-1} である．すなわち

$$A^{-1}=\left[\frac{A_{qp}}{|A|}\right].$$

逆行列によって除法の結果を表わすことができる．すなわち $AX=B$ ならば $X=A^{-1}B$，また $YA=B$ ならば $Y=BA^{-1}$．$A^{-1}B$ と BA^{-1} とは必ずしも相等しくはない．

$|A|=0$ であるときは逆行列は存在しない．Aを法とする除法は特別な場合においてのみ可能で，その結果も一意的でない．

4．行列の乗法では，その逆算法である除法が一意的でない場合があることに基づいて，いわゆる**零因子**というものが現われてくる．

それは $A\neq 0$，$B\neq 0$ でありながら $AB=0$ であるような「因子」A，B である．

たとえば $n=2$ の場合に

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

詳しくいえば $A\neq 0$，$B\neq 0$ で，$AB=0$ であるような A を B に対する左零因子といい，BをAに対する右零因子というべきである（上の例では $BA=B\neq 0$）．

$|A|=0$ であるとき，Aは零因子である．いま

$$A=[a_{pq}]$$

とすれば，$|A|=0$ であるとき

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0$$

は $(0,0,\cdots,0)$ 以外の解をもつ．そのような解を n 個の列にして行列 X を作れば $AX=0$ $(X\neq 0)$．同様に $YA=0$ $(Y\neq 0)$ なる行列 Y が存在する．

5.　n 次の正方行列において，ただ一つの組成分子 a_{pq} が 1 で，その他は 0 であるものを E_{pq} で表わすならば，行列 $A=[a_{pq}]$ は

$$A=\sum a_{pq}E_{pq} \qquad (p,q=1,2,\cdots,n)$$

に等しい（330頁〔注意〕）．ゆえに行列算は n^2 個の単位 E_{pq} をもった高等複素数（37頁参照）の算法と見なし得るものである．その単位の乗法の規則は

$$E_{pq}E_{rs}=\delta_{qr}E_{ps} \qquad \delta_{qr}=\begin{cases}0 & (q\neq r)\\ 1 & (q=r)\end{cases}$$

である．

もしも組成分子にある制限をつけるならば，特殊の行列算が生ずる．たとえば $n=2$ のとき

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}$$

のような形の行列はその和，差および積がやはり同じ形の行列になる．$\alpha=a+bi, \beta=c+di$ とおけばこの行列は

$$\begin{pmatrix}a+bi & c+di\\ -c+di & a-bi\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

あるいは $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$， $\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=I$， $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=J$， $\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=K$

とおけば

$$aE+bI+cJ+dK.$$

I,J,K の掛算は次の通りである．

$$I^2=J^2=K^2=-E,\ IJ=K,\ JK=I,\ KI=J,$$
$$JI=-K,\ KJ=-I,\ IK=-J.$$

すなわち Hamilton の四元法（quaternion）と同様である．一層特別に E と J とだけを取って，実係数 a,b を用いて

$$aE+bJ=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

のような行列のみを取り扱うことにすれば，この行列算は通常の複素数の計算とまった

く同一になる.

6. 一般にただ一つの行列Aとその冪 $A^2, A^3, \cdots$ とから

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

のような行列（Aの多項式）を作れば，そのような行列からは加法，減法，乗法によってやはり同様の行列ばかりが生ずる．この場合には乗法の交換の法則が成り立つから，除法が関係しない限りは，通常の代数文字xに関して成り立つ多項式の間の恒等式はxにAを代用してもやはり成り立つ．ただし多項式における定数項 a_0 には行列においては a_0E を代用するのである．E は恒等行列で，すなわち乗法単位であるから，それを1で表わし，a_0E を $a_0\cdot 1$ としるし，または誤解のおそれがなければ，単に a_0 ともしるす．

A^m のような行列は n^2 個の行列 E_{pq} の一次的結合であるから，n^2 個よりも多くが一次的に独立であり得ない．すなわち

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m=0$$

のような関係がなくてはならない．これに関して，次の定理が成り立つ．

〔**定理 9.16**〕 行列 A の固有方程式を $\varphi(x)=|A-xE|=0$ とすれば，$\varphi(A)=0$ (Cayley の定理).

たとえば

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \varphi(x)=\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix}=(ad-bc)-(a+d)x+x^2$$

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

〔**証**〕 行列 $A-xE$ の逆行列の組成分子は $|A-xE|$ の $n-1$ 次の小行列式を $|A-xE|$ すなわち $\varphi(x)$ で割ったものである．その第p行第q列にあるものを

$$\frac{a_{pq}^{(0)}+a_{pq}^{(1)}x+a_{pq}^{(2)}x^2+\cdots+a_{pq}^{(n-1)}x^{n-1}}{\varphi(x)}$$

とすれば

$$(A-xE)^{-1}=\frac{1}{\varphi(x)}(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}).$$

ここで $A_0, A_1, \cdots$ は次のような行列である．

$$A_0=[a_{pq}^{(0)}],\quad A_1=[a_{pq}^{(1)}],\quad A_2=[a_{pq}^{(2)}],\cdots,\ A_{n-1}=[a_{pq}^{(n-1)}].$$

ゆえに

$$(A-xE)(A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1})=\varphi(x)\cdot E \tag{1}$$

いま
$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$
とおけば，x の各冪の係数を比較して

$$\begin{aligned}
&AA_0 && =c_0E,\\
&AA_1 && -A_0 =c_1E,\\
&AA_2 && -A_1 =c_2E,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&AA_{n-1} && -A_{n-2}=c_{n-1}E,\\
& && -A_{n-1}=c_nE.
\end{aligned}$$

左から $E, A, A^2, \cdots, A^n$ を掛けて加え

$$c_0E+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_nA^n=0$$

すなわち

$$\varphi(A)=0.$$

〔注意〕（1）の左辺の二つの因子は交換可能である．ゆえに x に行列 A を代入してよい．しからば直ちに $\varphi(A)=0$ が得られる．上文では，わかりよい証明法を述べたのである．多項式の割り算の公式（§8, 3, 42 頁）

$$\varphi(x)-\varphi(a)=(x-a)(\varphi_0(a)x^{n-1}+\cdots+\varphi_i(a)x^{n-1-i}+\cdots+\varphi_{n-1}(a)),$$

ただし $\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, \varphi_i(x)=a_0x^i+a_1x^{i-1}+\cdots+a_i$，において，$a$ に行列 A を代入すれば，$\varphi(A)=0$ を用いて

$$\varphi(x)E=(xE-A)(\varphi_0(A)x^{n-1}+\cdots+\varphi_i(A)x^{n-1-i}+\cdots+\varphi_{n-1}(A))$$

ゆえに（1）の左辺の行列 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ は A の多項式である．すなわち

$$A_i=-\varphi_i(A).$$

7. このように，n 次の行列は n 次の方程式 $\varphi(A)=0$ を満足させるけれども，A がなお低次の方程式を満足させることもある．いま上の行列式 $|A-xE|=\varphi(x)$ の $n-1$ 次の小行列式の最大公約数を $d(x)$ とすれば，$\varphi(x)$ は $d(x)$ で割り切れる．そこで

$$\frac{\varphi(x)}{d(x)}=\psi(x)$$

とおけば，（1）が次のように表わされる．

$$(A-xE)^{-1}=\frac{1}{\psi(x)}\{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots\}. \qquad (2)$$

ゆえに前と同じようにして

$$\psi(A)=0$$

を得る．これが A が満足する最低次の方程式である．$\psi(x)$ を A の**最小多項式**という．実際，任意の多項式 $f(x)$ に関する恒等式

$$f(y)-f(x)=(y-x)\cdot g(x,y)$$

において y に行列 A を代入すれば

$$f(A)-f(x)\cdot E=(A-xE)\cdot g(x,A)$$

を得る．ゆえにもし

$$f(A)=0$$

ならば

$$-f(x)\cdot E=(A-xE)\cdot g(x,A).$$

ゆえに

$$f(x)\cdot(A-xE)^{-1}=-g(x,A).$$

すなわち $A-xE$ の逆行列の各組成分子に $f(x)$ を乗ずれば分母が払われるが，このような乗数の中で最低次のものが $\psi(x)$ であったのであるから，$f(x)$ は $\psi(x)$ で割り切れねばならない．よって $f(x)=\psi(x)\theta(x)$．ゆえに A が満足する最低次の方程式は $\psi(A)=0$ である．

（2）から　$\psi(x)E=(A-xE)(B_0+B_1x+\cdots)$

両辺の行列式を取って

$$(\psi(x))^n=\varphi(x)\cdot|B_0+B_1x+\cdots|$$

ゆえに $\varphi(x)$ の根，すなわち行列 A の固有値は，すべて $\psi(x)$ の根である．

$\psi(x)$ は $\varphi(x)$ の約数であるから，$\varphi(x)$ が n 個の相異なる根をもつときには，$\psi(x)$ は $\varphi(x)$ と一致する．ただ $\varphi(x)$ が複根をもつときに，$\psi(x)$ においては，その根の重複度数が低下することはあり得るのである．

8.　行列 A の固有方程式 $\varphi(x)=0$ の根，すなわち A の固有値を $r_1, r_2, \cdots,$

r_n とする．すなわち $\varphi(x)=(r_1-x)(r_2-x)\cdots(r_n-x)$.

〔**定理 9.17**〕 $f(x)$ を任意の多項式とすれば，行列 $f(A)$ の固有値は

$$f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n)$$

である．

〔**証**〕
$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$$
とおけば，

$$f(A)=a(A-\alpha_1E)(A-\alpha_2E)\cdots(A-\alpha_mE).$$

行列式を作れば，

$$\begin{aligned}|f(A)|&=a^n\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdots\varphi(\alpha_m)\\&=a^n\Pi(r_p-\alpha_q)\qquad(p=1,2,\cdots,n;\ q=1,2,\cdots,m)\\&=f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_n).\end{aligned}$$

$f(x)$ の代わりに $f(x)-t$ を用いるならば，

$$|f(A)-tE|=(f(r_1)-t)(f(r_2)-t)\cdots(f(r_n)-t)$$

すなわち $f(A)$ の固有値は $f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n)$ である．

9. 一つの行列 A の多項式の間においては，乗法の交換法則が成り立つから，除法が可能である場合には，左除法と右除法とを区別する必要はないが，除法は必ずしも一意的ではないから，零因子がでてきて，計算を複雑にするのである．

$f(x), g(x)$ を多項式とするとき，$|g(A)|\neq 0$ である場合には $g(A)\cdot X=f(A)$ なる行列 X が A の多項式として求められる．

$|g(A)|\neq 0$，すなわち，$g(r_1)g(r_2)\cdots g(r_n)\neq 0$ であるから，$g(x)$ は $\psi(x)$ と互いに素である．ゆえに

$$g(x)\cdot h(x)+\psi(x)\cdot\theta(x)=f(x) \tag{3}$$

のような恒等式が成り立つ．したがって x に A を代入して，$\psi(A)=0$ を用いて，

$$g(A)\cdot h(A)=f(A) \tag{4}$$

得る．よって $h(A)$ を商の形に

$$\frac{f(A)}{g(A)} \tag{5}$$

で表わす．これはAの多項式に等しい（その次数は$\psi(x)$の次数よりも低い）．

（3）からAの任意の固有値r_1に関して，$\psi(r_1)=0$を用いて

$$g(r_1)h(r_1)=f(r_1)$$

を得る．ゆえに行列（5）の固有値$h(r_1),h(r_2),\cdots,h(r_n)$は

$$\frac{f(r_1)}{g(r_1)},\ \frac{f(r_2)}{g(r_2)},\ \cdots,\ \frac{f(r_n)}{g(r_n)}$$

に等しい．

行列Aの行を列に転置した行列をA'とすれば$(A^m)'=(A')^m$．したがって$f(A)$の転置行列は$f(A')$に等しい．また（4）から見えるように$\dfrac{f(A)}{g(A)}$の転置行列は$\dfrac{f(A')}{g(A')}$に等しい．転置行列は原行列と同一の固有方程式をもつ．$\varphi(A')=0$, $\psi(A')=0$.

10.　行列算の応用の一例として直交行列の一般の形に関する **Cayley の公式**を出して見よう．

Pを直交行列とすれば$P'P=E$であることは§65に述べた．いま簡易のために実係数の正式直交行列（$|P|=1$）に限り，かつ

$$|E+P|\neq 0$$

と仮定して

$$\frac{E-P}{E+P}=A \qquad (7)$$

とおく．転置行列に移れば

$$\frac{E-P'}{E+P'}=A',$$

$PP'=E$を用いて，

$$\frac{P-E}{P+E}=A',$$

ゆえに

$$A'=-A.$$

すなわちAは歪対称行列である．逆に（7）から

$$E-P=A+PA.$$

したがって

$$\frac{E-A}{E+A}=P \qquad (8)$$

を得る．この式でAを任意の歪対称行列とすれば

$$P'=\frac{E-A'}{E+A'}=\frac{E+A}{E-A}=P^{-1}.$$

ゆえに（8）は直交行列である．Aは歪対称（組成分子は実数）であるから，その固有値は0または純虚数である（§68，問題1）．ゆえに$|E+A|\neq 0$で，（8）から直交行列が得られるのである．

よって次の定理を得る．

〔**定理 9.18**〕　Aを任意の実歪対称行列とすれば

$$P=\frac{E-A}{E+A}$$

は直交行列である．$|E+P|\neq 0$　である直交行列はすべてこの式によって求められる．

（8）から見えるように

$$|P|=\frac{|E-A|}{|E+A|}=\frac{|E+A'|}{|E+A|}=1.$$

$|P|=-1$　なる直交行列は$|E+P|\neq 0$なる条件のために除外されている．ただし$|P|=1$でも，$|E+P|=0$なるものは除外するのである．

〔例〕　$n=3$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$|E+A|=\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix}=1+a^2+b^2+c^2,$$

$$(E+A)^{-1}=\frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} 1+c^2 & -a-bc & -b+ac \\ a-bc & 1+b^2 & -c-ab \\ b+ac & c-ab & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$P=\frac{E-A}{E+A}=\frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} 1+c^2-a^2-b^2 & -2a-2bc & -2b+2ac \\ 2a-2bc & 1+b^2-a^2-c^2 & -2c-2ab \\ 2b+2ac & 2c-2ab & 1+a^2-b^2-c^2 \end{pmatrix}.$$

これが三次の正式直交行列の一般の形である．

ただし $|E+P|=0$，すなわちたとえば，

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \text{一般には}\quad P=\begin{pmatrix}l & m & n\\ l' & m' & n'\\ l'' & m'' & n''\end{pmatrix}$$

$$l+m'+n''=-1\ (\S 68,\ \text{問題}\ 7)$$

のような場合は除外されている．

上記は三つの変数 a,b,c によって（P の九つの組成分子の間に六つの条件があるから）直交行列を表わそうとしたのである．もしも変数を四つにして斉次にすれば，$1,a,b,c$，の代わりに d,a,b,c を代入し，かつ $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ とすることができる．しからば

$$P=\begin{pmatrix}d^2+c^2-a^2-b^2 & -2ad-2bc & -2bd+2ac\\ 2ad-2bc & d^2+b^2-a^2-c^2 & -2cd-2ab\\ 2bd+2ac & 2cd-2ab & d^2+a^2-b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

ここでは，上の除外の場合が $d=0$ として包括される．この公式は §6,2 (29 頁) に掲げたものと同一である（記号だけが違う．上の a,b,c に $c,-b,a$ を代入すれば §6 の公式を得る)．

〔**問題**〕 §68 に掲げた U 行列は

$$\overline{U}'U=E$$

を満足するものである．A を $\overline{A}'=-A$ ($a_{pq}=-\overline{a}_{qp}$, a_{pp} は純虚数）である行列とし，$|\varepsilon|=1$ とすれば

$$U=\frac{\varepsilon(E-A)}{E+A} \tag{9}$$

は U 行列である．すべての U 行列はこのようにして作られる．

〔解〕 Aの固有値は純虚数であるから $|E+A|\neq 0$. ゆえに（9）の行列は存在する．さて

$$\overline{U}'=\frac{\overline{\varepsilon}(E-\overline{A}')}{E+\overline{A}'}=\frac{\overline{\varepsilon}(E+A)}{E-A}=U^{-1}$$

ゆえに（9）は U 行列である．逆に（9）から

$$A=\frac{\varepsilon-U}{\varepsilon+U}.$$

この式で $\overline{U}'U=E$ とすれば $\overline{A}'=-A$ を得る．Uが与えられたとき，$|\varepsilon+U|\neq 0$ なるように ε が取られるから，すべての U 行列は（9）から出る．

〔注意〕 A の固有値を ri とすれば U の固有値は $\frac{\varepsilon(1-ri)}{1+ri}$ である（上記9）．ゆえにその絶対値は1に等しい．

第10章　終結式 スツルムの問題と二次形式

§ 72.　終結式を行列式として表わすこと

1.　本章では，行列式および二次形式の応用として，終結式に関する細論をする．

二つの方程式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0,$$

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$$

が共通根をもつために必要かつ十分な条件は，f と g との終結式が 0 に等しいことであるのは，根の対称式として，§ 28 に証明した通りである．

この条件を直接に f と g の係数で表わすために Sylvester が次のような考案をした．

いま $f(x)=0$，$g(x)=0$ に共通根があると仮定して，x はその共通根を表わすものとすれば，

$$\begin{aligned}
x^{n-1}f(x)&=a_0x^{m+n-1}+a_1x^{m+n-2}+\cdots+a_mx^{n-1} &&=0,\\
x^{n-2}f(x)&=\qquad a_0x^{m+n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_mx^{n-2} &&=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(x)&=\qquad\qquad a_0x^m+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_m &&=0,\\
x^{m-1}g(x)&=b_0x^{m+n-1}+b_1x^{m+n-2}+\cdots+b_nx^{m-1} &&=0,\\
x^{m-2}g(x)&=\qquad b_0x^{m+n-2}+\cdots\cdots\cdots+b_nx^{m-2} &&=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
g(x)&=\qquad\qquad b_0x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n &&=0.
\end{aligned}$$

これらの $m+n$ 個の等式を，$x^{m+n-1},\cdots,x,1$ なる $m+n$ 個の数の間の斉次一次方程式と見れば，

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_m & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_n & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} n\text{行} \\ \left.\right\} m\text{行} \end{matrix} =0.$$

(文字のしるしてない所は 0 でうずめる．以下同様)．

ゆえに $R=0$ は共通根があるために必要な条件である．

上の行列式 R は，係数 a に関しては n 次，b に関しては m 次であること，§28 の終結式 $R(f,g)$ と同様である．これらが実際同一であることは，次のように考えれば明白である．

$R(f,g)=0$ は $f(x)$ と $g(x)$ とに共通の根があるために十分な条件である (§28) から，$R(f,g)=0$ であるときには，共通根が存在する．しかるに上のように共通根があれば，$R=0$．すなわち $R(f,g)=0$ のときには，$R=0$ である．

しかるに $R(f,g)$ も R も a,b という文字の多項式で，かつ $R(f,g)$ は分解することのできない多項式である．よって上の結果から，R は $R(f,g)$ で割り切れなければならない(定理 4.10)．また次数の比較によって，この商は定数でなければならない．しかるに，R も $R(f,g)$ も $a_0^n b_n^m$ という項を含むから，$R=R(f,g)$．

2.　§28 の定理を用いないで，すなわち代数学の基本定理によらないで，単に式の上から $R=0$ が $f(x)$ と $g(x)$ とに共通因子の存在するための十分な条件であることを証明するのはややわずらわしいが，次にその証明を試みるであろう．

上の R の第 $1,\cdots,m+n-1$ 列に $x^{m+n-1},\cdots,x$ を掛けて最後の列に加えるならば，最後の列は $x^{n-1}f, x^{n-2}f,\cdots,f\,;\,x^{m-1}g,\cdots,g$ になる．それを最後の列に関して展開すれば

$$R=fQ-gP$$

を得る．P,Q は x に関して見掛け上 $m-1$，$n-1$ 次の多項式である．さて $R=0$ で

あるときは，$fQ=gP$. P, Q がそれぞれ f, g よりも低次であるから f, g は公約数をもたなければならない．ただしこの議論は P または Q が x に関して恒等的に 0 にならないことが確かめられなければ妥当でない．そこで問題がむずかしくなって，R の小行列式の間の関係を吟味する必要が生ずるのである．

われわれの目的は R が終結式であることを確かめようというばかりではなくて，行列 R の性質と f, g の公約数との間に存在する関係を徹底的にせん明することにある．実際，行列 R から，f, g が公約数をもつための条件を得るだけでなく，公約数がある場合における最大公約数の次数を決定することができる．また最大公約数それ自身を求めることもできる．更に進んでは $f(x)$, $g(x)$ に Euclid の算法を行なうときに出てくる逐次の剰余までも求めることができる．むしろ，行列 R の面上において，Euclid の算法を行なうというのが適切である．

3. 上の問題を解くには，行列 R の構造を少し変更して，次のようにするのが便利である．

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

を n 次の多項式とし，

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

は形式上 n 次の形に表わすが，実際は n よりも低次でもあり得るとする．すなわち $g(x)$ の真の次数が $n-\nu$ ならば $b_0=b_1=\cdots=b_{\nu-1}=0$, $b_\nu\neq 0$ とする．もちろん $g(x)$ が n 次ならば $\nu=0$, $b_0\neq 0$.

$f(x)$ と $g(x)$ との係数を一列ずつ下げて k 対並べて，次のような行列を作って，それを (R_k) と名づける．

$$(R_k)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & & \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ & & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \end{pmatrix} \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \qquad (1)$$

すなわち (R_k) は行数 $2k$, 列数 $n+k$ である.

(R_k) の最後の列から始めて, 次々の列に $1, x, x^2, \cdots, x^{n-k}$ を掛けて加えたものを $2k$ 番目の列にして, (R_k) を方形にたたんで, $2k$ 次の行列式

$$R_k(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, a_{2k-1}x^{n-k}+a_{2k}x^{n-k-1} & +\cdots \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, b_{2k-1}x^{n-k}+b_{2k}x^{n-k-1} & +\cdots \\ & a_0\, a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, a_{2k-2}x^{n-k}+a_{2k-1}x^{n-k-1}+\cdots & \\ & b_0\, b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, b_{2k-2}x^{n-k}+b_{2k-1}x^{n-k-1}+\cdots & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot\, a_kx^{n-k}+a_{k+1}x^{n-k-1}+\cdots+a_n & \\ & & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot\, b_kx^{n-k}+b_{k+1}x^{n-k-1}+\cdots+b_n & \end{vmatrix} \qquad (2)$$

を作る. $R_k(x)$ は x に関して $n-k$ 次以下の多項式である. それを

$$R_k(x)=R_kx^{n-k}+R_{k,1}x^{n-k-1}+\cdots+R_{k,n-k}$$

のように x の降冪に排列してしるせば R_k は次のような $2k$ 次の行列式で$R_{k,1}$, $R_{k,2},\cdots$ は R_k の最終列の文字の番号をそれぞれ $1,2,\cdots$ だけ増したものである. ただし a も b も n よりも大きい番号をもつものは 0 を表わすものとする.

$$R_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-1} \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k-1} \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-2} \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k-2} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_k \\ & & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_k \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$R_k(x)$ の第一列から始めて次々の列に x^{n+k-1}, $x^{n+k-2}, \cdots$ を掛けて最後の列に加えると $R_k(x)$ が見やすい形になる.

$$R_k(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, a_{2k-2} & x^{k-1}f(x) \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, b_{2k-2} & x^{k-1}g(x) \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, a_{2k-3} & x^{k-2}f(x) \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, b_{2k-3} & x^{k-2}g(x) \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 & \cdot & a_{k-1} & f(x) \\ & & & b_0 & b_1 & \cdot & b_{k-1} & g(x) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

4. さて $f(x)$ と $g(x)$ との実際の次数の差を ν とすれば，$b_0, b_1, \cdots$ のうちで 0 にならない最初のものは b_ν である．

$\nu\geqq 1$ とすれば，

$$R_1(x)=\begin{vmatrix} a_0 & f(x) \\ & g(x) \end{vmatrix}=a_0g(x). \qquad (5)$$

$\nu>1$ ならば，1 と ν との間の k に関しては

$$R_k(x)=0. \qquad (1<k<\nu) \qquad (6)$$

また $R_\nu(x)$ における b に関する行を下の方へ移せば

$$\varepsilon_\nu R_\nu(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x^{\nu-1}f(x) \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f(x) \\ & & & b_\nu & \cdot & x^{\nu-1}g(x) \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & g(x) \end{vmatrix}=a_0^\nu b_\nu^{\nu-1}g(x), \qquad (7)$$

ただし $$\varepsilon_\nu=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

ν よりも大きい番号 $\nu+k$ に対しては

$$
\varepsilon_{\nu+k}R_{\nu+k}(x)=
\begin{array}{r|cc:cccccccc|}
 & a_0 & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{\nu+k-1}f \\
\nu\Big\{ & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^k f \\
\hdashline
 & & & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-1}f \\
k\Big\{ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\
\hdashline
 & & & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{\nu+k-1}g \\
\nu+k\Big\{ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g
\end{array}
$$

$$
=a_0^\nu
\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-1}f \\
 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-2}f \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & f \\
b_\nu & b_{\nu+1} & & \cdot & \cdot & \cdot & & x^{\nu+k-1}g \\
 & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & x^{\nu+k-1}g \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & g
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}A(k\text{ 行})\\
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}B(\nu+k\text{ 行})
\end{array}
\qquad (8)
$$

さて $f(x)$ を $g(x)$ で割って，その商を $q(x)$，剰余を $-h(x)$ とし

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)-h(x),$$

$$q(x)=q_0x^\nu+q_1x^{\nu-1}+\cdots+q_\nu$$

とおく．上の行列式（8）において，A で表示した部分の第一行から B の第一行に q_0 を掛けて引けば，a_0 は消えてその次に f/g の割り算における第一段の剰余の係数が順次に並ぶ．更に B の第二行に q_1 を掛けて引けば，割り算の第二段の剰余の係数が二列下って並ぶ．次第にこのようにして B の第

$\nu+1$ 行に q_ν を掛けて引けば，$-h(x)$ の係数が $\nu+1$ 列下って並ぶのであるが，この結果を見やすく式の上に表わすために，

$$h(x)=c_\nu x^{n-\nu}+c_{\nu+1}x^{n-\nu-1}+\cdots+c_n$$

とおく．$h(x)$ の次数は $n-\nu$ よりは低いから c_ν はもちろん 0 であるが，形式上 $h(x)$ を $n-\nu$ 次の式に書いておく方が都合がよい（$g(x)$ を n 次の形に書いたのと同様）．

このような記号を用いるならば，上の変形によって行列式（8）の A の部第一行

$$a_0\ \ a_1\cdots\ \ a_\nu\ \ a_{\nu+1}\cdots\ \ x^{k-1}f(x)$$

は

$$0\ \ 0\cdots-c_\nu\ -c_{\nu+1}\cdots-x^{k-1}h(x)$$

に変わるのである．

A の第二行以下第 k 行までに，同様の操作を行なえば，ついに次のようになる．

$$\varepsilon_{\nu+k}R_{\nu+k}(x)=a_0^\nu\left|\begin{array}{ccc|cccccc}
0 & 0\cdot & 0 & -c_\nu & -c_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & -x^{k-1}h(x)\\
 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & -c_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & -x^{k-2}h(x)\\
 & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\
 & & 0 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & -c_\nu & \cdot & \cdot & -h(x)\\
\hline
b_\nu & b_{\nu+1} & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & x^{\nu+k-1}g(x)\\
 & b_\nu & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & x^{\nu+k-2}g(x)\\
 & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\
 & & b_\nu & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & x^kg(x)\\
\hline
 & & & b_\nu & b_{\nu+1} & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & x^{k-1}g(x)\\
 & & & & b_\nu & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & x^{k-2}g(x)\\
 & & & & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\
 & & & & & b_\nu & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & g(x)
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}k\ \text{行}\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\nu\ \text{行}\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}k\ \text{行}
\end{array}$$

この行列式から因数 $(-1)^{\nu k}b_\nu^\nu$ を出して次数を $2k$ に縮め，また c に関する行の符号を変え，かつそれを一つずつ b の行の間へ移転させると，右辺は

$$(-1)^{\nu k}\varepsilon_k a_0^\nu b_\nu^\nu R_k^{(1)}(x)$$

になる．よって $\varepsilon_{\nu+k}=\varepsilon_\nu\varepsilon_k(-1)^{\nu k}$ に注意して

$$R_{\nu+k}(x)=\varepsilon_\nu(a_0b_\nu)^\nu R_k^{(1)}(x). \qquad (9)$$

$R_k^{(1)}(x)$ は $g(x)$ と $h(x)$ とに関して R_k と同様の構造をもつ．すなわち

$$R_k^{(1)}(x)=\begin{vmatrix} b_\nu & b_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-1}g(x) \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-1}h(x) \\ & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-2}g(x) \\ & c_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-2}h(x) \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & b_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & g(x) \\ & & c_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & h(x) \end{vmatrix} \qquad (10)$$

$$g(x)=b_\nu x^{n-\nu}+b_{\nu+1}x^{n-\nu-1}+\cdots+b_n, \qquad (b_\nu\neq 0)$$

$$h(x)=c_\nu x^{n-\nu}+c_{\nu+1}x^{n-\nu-1}+\cdots+c_n, \qquad (c_\nu=0).$$

$\nu=0$ すなわち $f(x)$ と $g(x)$ とが同次であるときには，

$$f(x)=q_0g(x)-h(x),$$

$$h(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n, \qquad c_0=0,$$

$$R_k(x)=R_k^{(1)}(x).$$

さて，$g(x)$ を $h(x)$ で割った剰余を $-k(x)$ として，同様の変形を行ない，ついに $f(x), g(x)$ の最大公約数 $l(x)$ を得るに至ったとする．$f(x)$ から $g(x), g(x)$ から $h(x)$, $h(x)$ から $k(x), \cdots$ への実際の次数の低下を ν, $\nu', \nu'', \cdots$ とし，また便宜上 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x), \cdots, l(x)$ の最高次の項の係数（すなわち $a_0, b_\nu, c_{\nu+\nu'}$, などを $a, b, c, d, \cdots, e$ としるし，

$$g(x)=b\cdot g^*(x), h(x)=c\cdot h^*(x), k(x)=d\cdot k^*(x), \cdots, l(x)=e\cdot l^*(x)$$

などとして，上の逐次の変形の結果を書けば次のようになる．

$R_1(x)=ab\cdot g^*(x),\qquad R_2(x)=0,\cdots,R_{\nu-1}(x)=0\,;$

$R_\nu(x)=\varepsilon_\nu(ab)^\nu\cdot g^*(x)$

$R_{\nu+1}(x)=\varepsilon_\nu(ab)^\nu bc\cdot h^*(x),\qquad R_{\nu+2}(x)=0,\cdots,R_{\nu+\nu'-1}(x)=0\,;$

$R_{\nu+\nu'}(x)=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}(ab)^\nu(bc)^{\nu'}\cdot h^*(x),$

$R_{\nu+\nu'+1}(x)=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}(ab)^\nu(bc)^{\nu'}cd\cdot k^*(x),$

$R_{\nu+\nu'+2}(x)=0,\cdots,R_{\nu+\nu'+\nu''-1}(x)=0\,;$

$R_{\nu+\nu'+\nu''}(x)=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}\varepsilon_{\nu''}(ab)^\nu(bc)^{\nu'}(cd)^{\nu''}\cdot k^*(x),$

. . . .

$R_{n-m}(x)=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}\varepsilon_{\nu''}\cdots(ab)^\nu(bc)^{\nu'}(cd)^{\nu''}\cdots l^*(x),$

$R_{n-m+1}(x)=0,$

以下 $R(x)$ すべて 0.

ただし $n-m=\nu+\nu'+\nu''+\cdots$ で，m は最大公約数 $l(x)$ の次数である．

上にもしるしたように

$$R_k(x)=R_kx^{n-k}+R_{k,1}x^{n-k-1}+\cdots+R_{k,n-k}$$

とおけば，係数 $R_k,R_{k,1},\cdots$ などに関しては上の表から

$R_1=0,\ \ R_{1,1}=0,\cdots,R_{1,\nu-1}=ab,\cdots(\nu>1)$

$R_2=0,\ \ R_{2,1}=0\cdots,\ \ R_{2,n-2}=0.$

. . . .

$R_\nu=\varepsilon_\nu(ab)^\nu,\cdots$

$R_{\nu+1}=0,R_{\nu+1,1}=0,\cdots,R_{\nu+1,\nu'-1}=\varepsilon_\nu(ab)^\nu bc,\cdots(\nu'>1)$

$R_{\nu+2}=0,R_{\nu+2,1}=0,\cdots,R_{\nu+2,n-\nu-2}=0,$

. . . .

$R_{\nu+\nu'}=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}(ab)^\nu(bc)^{\nu'},\cdots$

. . . .

$R_{n-m}=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}\varepsilon_{\nu''}\cdots(ab)^\nu(bc)^{\nu'}(cb)^{\nu''}\cdots$

$R_{n-m+1}=0,\cdots,R_n=0.$ *

(*) f と g とが n 次のときには $R_{\nu+1}(x)$ から始めて $\nu=0$ $(\varepsilon_\nu=1)$ とするのである．

〔**定理 10.1**〕 n 次の多項式 $f(x)$ と n 次以下の多項式 $g(x)$ とから作った行列式 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ の中で 0 にならない最後のものが R_{n-m} ならば，$R_{n-m}(x)$ が $f(x)$ と $g(x)$ との最大公約数で，m がその次数である．

$R_k \neq 0$ ならば，$R_k(x)$ は定数因子を度外におけば f, g に行なった Euclid 算法中に現われる一つの剰余である．

もし $R_k \neq 0$ で，$R_{k+1} = R_{k+2} = \cdots = R_{k+\mu-1} = 0, R_{k+\mu} \neq 0$ ならば $R_k(x)$ に次いで現われる剰余 $R_{k+\mu}(x)$ は次数において μ だけ低下する．

そのとき $R_{k+1}(x)$ は，定数因子を度外におけば，この $n-k-\mu$ 次の剰余 $R_{k+\mu}(x)$ に等しく，$R_{k+2}(x), \cdots, R_{k+\mu-1}(x)$ は恒等的に 0 となる．

文献上には，通例 **1**. に出したように，$f(x), g(x)$ の実際の次数を m, n とし，$f(x)$ の係数を一つずつ下げて n 行，$g(x)$ の係数を一つずつ下げて m 行並べた行列式が取り扱われている．上文では，$g(x)$ を n 次の形に表わして，その最初の $n-m=\nu$ 個の 0 に等しい係数をも並べて書くことにしたために，$\nu > 0$ のときには

$$R_1(x) = a_0 g(x), R_2(x) = 0, \cdots, R_{\nu-1}(x) = 0, R_\nu(x) = \varepsilon_\nu a_0^\nu b_\nu^{\nu-1} g(x)$$

など，一見無益に感じられるものが現われて来たのであるが，注意深い読者が看破したであろう通り，このようにすることによって，$f(x)$，$g(x)$ に対する $R(x)$ から，次々に $g(x), h(x)$ に対する $R^{(1)}(x)$，また $h(x), k(x)$ に対する $R^{(2)}(x)$ などに，円滑に乗り移ることができたのである．

また係数 a と係数 b とを別々にまとめて並べる代わりに，a, b を交互に並べたのは符号の関係上の便利のためである．従来の文献において例とするように，小行列式 R_k が 0 になるか，ならないかだけを目標にするならば，符号はどちらでもよいけれども，後に至って Sturm の問題への応用上，R_k の符号を考察する必要が生ずる場合に，上の変改が実際便利であることがわかるであろう．

§73.　$R_k(x)$ の変形

1.　前節に示した行列式 $R_k(x)$ の形を半分に縮小して，それを k 次の行

列式に変形することができる．その結果だけを計算によって出すことは容易であるが，少し問題の根底に立ち入って説明を試みることにする．

前の通り

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

とする．ただし本節では専ら式の形について論ずるのであるから係数 a, b は文字で与えられたものとして，その間に何等特別な関係はないものとする．

前節（4）（345 頁）の行列式を最後の列に関して展開すれば

$$R_k(x)=P\cdot g-Q\cdot f$$

のような形になる．ただし P, Q は $k-1$ 次以下の多項式である．そうして $R_k(x)$ は $n-k$ 次の多項式である．

いま一般に

$$Pg-Qf=T \tag{1}$$

において，P, Q は $k-1$ 次以下で，しかも T が $n-k$ 次になるような T を求めよう．$T=R_k(x)$ はその一つの解である．

$k-1$ 次の多項式は k 個の項を含むから，k だけが一次的に独立である．いま $P_1, P_2, \cdots, P_k$ を一次的に独立な $k-1$ 次以下の多項式として，$P_1g, P_2g, \cdots, P_kg$ を f で割った商を $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$　剰余を $T_1, T_2, \cdots, T_k$ として，それらを次のように表わす．

$$P_1g-Q_1f=t_{11}x^{n-1}+t_{12}x^{n-2}+\cdots+t_{1n}=T_1,$$

$$P_2g-Q_2f=t_{21}x^{n-1}+t_{22}x^{n-2}+\cdots+t_{2n}=T_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_kg-Q_kf=t_{k1}x^{n-1}+t_{k2}x^{n-2}+\cdots+t_{kn}=T_k.$$

任意の $k-1$ 次の多項式 P は $P_1, P_2, \cdots, P_k$ の一次的結合として表わされる．それを

$$P=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k$$

として，Pg を f で割った商を Q，剰余を T とすれば，

$$Q=c_1Q_1+c_2Q_2+\cdots+c_kQ_k,$$
$$T=c_1T_1+c_2T_2+\cdots+c_kT_k.$$

これらの定数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ を適当に選んで，剰余 T の次数を成るべく低くするには

$$c_1t_{11}+c_2t_{21}+\cdots+c_kt_{k1}=0,$$
$$c_1t_{12}+c_2t_{22}+\cdots+c_kt_{k2}=0,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

としなければならない．このような $c_1, c_2, \cdots, c_k$ は k 元の斉次一次方程式から求められるべきものであるから，求める T は次のようになる．

$$T=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdot & \cdot & T_1 \\ t_{21} & t_{22} & \cdot & \cdot & T_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdot & \cdot & T_k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdot & \cdot\, t_{1k}x^{n-k}+ & \cdots\cdots & +t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdot & \cdot\, t_{2k}x^{n-k}+ & \cdots\cdots & +t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdot & \cdot\, t_{kk}x^{n-k}+ & \cdots\cdots & +t_{kn} \end{vmatrix}$$

すなわち T は $n-k$ 次で，x^{n-k} の係数は

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{kk} \end{vmatrix},$$

t_{pq} はすべて係数 a, b に関する一次式であるが，この行列式が a, b に関して恒等的に 0 にならないならば，上の T が定数因子を外にしては (1) のただ一つの解でなくてはならない．しかるに (1) は現に $T=R_k(x)$ なる解をもつから，$R_k(x)$ が上の方法によって k 次の行列式として表わされねばならない．

さて
$$\left.\begin{aligned} f_p&=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p,\\ g_p&=b_0x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_p \end{aligned}\right\}\quad(p=0,1,\cdots,n)$$

とすれば，上の $P_1, P_2, \cdots, P_k$ を $f_0, f_1, \cdots, f_{k-1}$ とすることができる．そのときには，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ が $g_0, g_1, \cdots, g_{k-1}$ になることは見やすい．この場合，剰余 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ を $d_1(x), d_2(x), \cdots, d_k(x)$ で表わして

$$f_0 g - g_0 f = d_{11}x^{n-1} + d_{12}x^{n-2} + \cdots + d_{1n} = d_1(x),$$

$$f_1 g - g_1 f = d_{21}x^{n-1} + d_{22}x^{n-2} + \cdots + d_{2n} = d_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{k-1}g - g_{k-1}f = d_{k1}x^{n-1} + d_{k2}x^{n-2} + \cdots + d_{kn} = d_k(x)$$

とおく．すなわち

$$d_p(x) = \begin{vmatrix} f_{p-1}(x) & f(x) \\ g_{p-1}(x) & g(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0x^{p-1} + a_1x^{p-2} + \cdots + a_{p-1}, & a_px^{n-p} + \cdots + a_n \\ b_0x^{p-1} + b_1x^{p-2} + \cdots + b_{p-1}, & b_px^{n-p} + \cdots + b_n \end{vmatrix}.$$

$$d_{pq} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \begin{vmatrix} a_\lambda & a_\mu \\ b_\lambda & b_\mu \end{vmatrix}, \qquad (\lambda + \mu = p + q - 1)$$

ただし，$\mu > n$ なる a_μ, b_μ は 0 とするのである．

または

$$\begin{vmatrix} a_\lambda & a_\mu \\ b_\lambda & b_\mu \end{vmatrix} = (\lambda, \mu)$$

とおけば

$$d_{pq} = (0, p+q-1) + (1, p+q-2) + \cdots + (p-1, q)$$

よって

$$(h, h) = 0, \qquad (h, k) + (k, h) = 0$$

に注意して

$$d_{pq} = d_{qp}.$$

したがって

$$R_k(x)=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1,k-1} & d_1(x) \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2,k-1} & d_2(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{k,k-1} & d_k(x) \end{vmatrix} \tag{2}$$

を得る．実際，両辺は第一共に a,b に関して k 次であるから数字係数においてのみ異なり得る．次に，$R_k(x)$ においては，$(a_0b_k)^k$ の係数は $\varepsilon_k=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$，右辺においては，第二対角線上の項のみが $(0,k)$ を含み，したがって $(a_0b_k)^k$ の係数はやはり ε_k である．

〔例〕 $n=5$ とすれば d_{pq} の行列は次の通り．

$$\begin{pmatrix} (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & (0,5) \\ (0,2) & (1,2)+(0,3) & (1,3)+(0,4) & (1,4)+(0,5) & (1,5) \\ (0,3) & (1,3)+(0,4) & (2,3)+(1,4)+(0,5) & (2,4)+(1,5) & (2,5) \\ (0,4) & (1,4)+(0,5) & (2,4)+(1,5) & (3,4)+(2,5) & (3,5) \\ (0,5) & (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) \end{pmatrix}$$

2. 上の等式（2）が本節の帰結である．理屈なしに，ただ（2）を験証するだけならば，次のようにすればよい．

$$\left|\begin{array}{ccccc:cccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hdashline & & & & -b_0 & & & & & & a_0 \\ & & & -b_0 & -b_1 & & & & & a_0 & a_1 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ -b_0 & -b_1 & \cdot & & -b_{k-1} & a_0 & a_1 & \cdot & & \cdot & a_{k-1} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_k & \cdot & \cdot & x^{k-1}f \\ & a_0 & \cdot & \cdot & a_{k-1} & \cdot & \cdot & x^{k-2}f \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot\ f \\ \hdashline b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_k & \cdot & \cdot & x^{k-1}g \\ & b_0 & \cdot & \cdot & b_{k-1} & \cdot & \cdot & x^{k-2}g \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot\ g \end{array}\right|$$

$$
= \left|\begin{array}{cccc:cccccc}
a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot & \cdot & a_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-1}f \\
 & a_0 & \cdot\ \cdot & \cdot & a_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x^{k-2}f \\
 & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f \\
\hdashline
 & & & & d_{11} & d_{12} & & \cdot & \cdot & d_1(x) \\
 & & 0 & & d_{21} & d_{22} & & \cdot & \cdot & d_2(x) \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & d_{k1} & d_{k2} & & \cdot & \cdot & d_k(x)
\end{array}\right|
$$

左辺の第一の行列式は $\varepsilon_k a_0^k$. 第二の行列式は $\varepsilon_k R_k(x)$ である. よって両辺を a_0^k で割って (2) を得る.

3. 上の係数 d_{pq} は Cayley が指摘したように,

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}$$

の展開から求めることができる. すなわち展開における $x^{n-p}y^{n-q}$ の係数が d_{pq} に等しい. 実際 (f_p, g_p は 352 頁の通りとして)

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y} &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}g(y)-\frac{g(x)-g(y)}{x-y}f(y) \\
&= \{f_0(y)x^{n-1}+f_1(y)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(y)\}g(y) \\
&\quad -\{g_0(y)x^{n-1}+g_1(y)x^{n-2}+\cdots+g_{n-1}(y)\}f(y) \\
&= x^{n-1}d_1(y)+x^{n-2}d_2(y)+\cdots+d_n(y) \\
&= \sum_{p,q} d_{pq}x^{n-p}y^{n-q}. \qquad (p, q=1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

4. $R_k(x)$ は次のようにしても, k 次の行列式として表わされる.

前の通り,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0 \neq 0) \\
g(x) &= b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n
\end{aligned}
$$

として, g/f を x の降冪に展開して

$$\frac{g(x)}{f(x)}=c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\cdots \qquad (3)$$

とおけば，$c_1, c_2, \cdots$ によって $R_k(x)$ を k 次の行列式として表わすことができる．すなわち次の通り．

$$R_k(x)=a_0^{2k-1}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & c_{k-1} & c_kf_{n-k}+c_{k+1}f_{n-k-1}+\cdots+c_nf_0 \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_k & c_{k+1}f_{n-k}+c_{k+2}f_{n-k-1}+\cdots+c_{n+1}f_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdots\cdots\cdots \\ c_k & c_{k+1} & \cdot & & c_{2k-2} & c_{2k-1}f_{n-k}+c_{2k}f_{n-k-1}+\cdots+c_{n+k-1}f_0 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$=a_0^{2k-1}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & c_{k-1} & c_1f_{n-1}+c_2f_{n-2}+\cdots\cdots+c_nf_0 \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_k & c_2f_{n-1}+c_3f_{n-2}+\cdots\cdots+c_{n+1}f_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdots\cdots\cdots \\ c_k & c_{k+1} & \cdot & & c_{2k-2} & c_kf_{n-1}+c_{k+1}f_{n-2}+\cdots\cdots+c_{n+k-1}f_0 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

ただし $f_p=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p$ は前の通り．

特に最高次の項の係数として，

$$R_k=a_0^{2k}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & c_k \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_k & c_{k+1} & & \cdot & c_{2k-1} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

次にその験証をする．

上の展開（3）から

$$\frac{x^kg(x)}{f(x)}=c_0x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k+\frac{c_{k+1}}{x}+\frac{c_{k+2}}{x^2}+\cdots.$$

よって $x^kg(x)$ を $f(x)$ で割った剰余を $g^{(k+1)}(x)$ とすれば

$$\frac{g^{(k+1)}(x)}{f(x)}=\frac{c_{k+1}}{x}+\frac{c_{k+2}}{x^2}+\cdots.$$

したがって

$$g^{(k+1)}(x)=f(x)\left(\frac{c_{k+1}}{x}+\frac{c_{k+2}}{x^2}+\cdots+\frac{c_{k+n}}{x^n}\right) \text{ の整の部分}$$

$$=c_{k+1}f_{n-1}(x)+c_{k+2}f_{n-2}(x)+\cdots+c_{k+n}f_0(x). \qquad (7)$$

1. において $P_1, P_2, \cdots, P_k$ で表わした多項式を $1, x, \cdots, x^{k-1}$ とするときの剰余 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ がすなわち $g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \cdots, g^{(k)}(x)$ である．よってこの場合における（1）の多項式 T は $g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \cdots, g^{(k)}(x)$ の一次的結合で，その次数の $n-k$ なるもの，すなわち

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot\, g^{(1)}(x) \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot\, g^{(2)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ c_k & c_{k+1} & & \cdot & \cdot\, g^{(k)}(x) \end{vmatrix} \tag{8}$$

である．ゆえに $R_k(x)$ はこの多項式と定数因子においてのみ異なり得るものである．

（7）によれば（8）は（5）の右辺の行列式に等しいから，（5）を験証するには（6）が成り立つことを示せばよい．

さて（3）から

$$\begin{aligned} &c_0a_0=b_0, \\ &c_0a_1+c_1a_0=b_1, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &c_0a_n+c_1a_{n-1}+\cdots+c_na_0=b_n, \\ &c_1a_n+c_2a_{n-1}+\cdots+c_{n+1}a_0=0, \\ &c_2a_n+c_3a_{n-1}+\cdots+c_{n+2}a_0=0, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{aligned}$$

または n よりも大きい番号の a, b は 0 であるという従前の規約を用いるならば，一般に

$$c_0a_k+c_1a_{k-1}+\cdots+c_ka_0=b_k.$$

これを用いて

$$
\left|\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\
 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & & \\
 & & \cdots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
\hdashline
c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k & \cdots & & c_{2k-1} \\
 & c_0 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} & \cdots & & c_{2k-2} \\
 & & \cdots & & & \cdots & & \\
 & & & c_0 & c_1 & \cdots & & c_k
\end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc:cccc}
a_0 & a_1 & \cdots & & a_k & \cdots & & a_{2k-1} \\
 & a_0 & \cdots & & a_{k-1} & \cdots & & a_{2k-2} \\
 & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & & a_k \\
\hdashline
 & & & & a_0 & \cdots & & a_{k-1} \\
 & 0 & & & & a_0 & \cdot & a_{k-2} \\
 & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & & a_0
\end{array}\right|
$$

を計算すれば，積の上半は第二の行列の通りで下半は

$$
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k & \cdots & & b_{2k-1} \\
 & b_0 & \cdots & b_{k-2} & b_{k-1} & \cdots & & b_{2k-2} \\
 & & \cdots & & & \cdots & & \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & & b_k
\end{array}\right)
$$

になる．

よって

$$
\begin{vmatrix}
c_k & \cdots & c_{2k-1} \\
c_{k-1} & \cdots & c_{2k-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
c_1 & \cdots & c_k
\end{vmatrix} \times a_0^{2k} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} R_k.
$$

左辺の行列式の行の順序を逆にすれば，両辺から $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ が消去されて（6）を得る．

§ 74. Sturm の問題への応用

1. $f(x)$ と $g(x)$ とに行なえる Euclid 算法に現われる剰余を求め得たから，方程式 $f(x)=0$ に関する Sturm の問題にそれを応用することが出来る．

§72 のように符号を変えた逐次の剰余を $h(x)$, $k(x)\cdots$, $l(x)$ とし $f(x)$, $g(x), h(x), k(x), \cdots$ における最高次の項の係数を $a, b, c, d, \cdots$ とする. まず $f, g, h, k, \cdots$ の次数が次々に一次ずつ低下する場合を考察する ($\nu=\nu'=\nu''=\cdots=1$).

この場合には (349 頁)

$$R_1=ab,$$
$$R_2=ab\cdot bc,$$
$$R_3=ab\cdot bc\cdot cd,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

また $f(x)$, $g(x)$, $h(x), \cdots, l(x)$ に関して, $V(\infty)$ は $a, b, c, d, \cdots$ の間の符号の変化の数, $V(-\infty)$ はそれらの間の符号連続の数すなわち $P(\infty)$ に等しい. しかるに $V(\infty), P(\infty)$ を計算するのに $a, b, c, d, \cdots$ の代わりに

$$R_0=1, R_1, R_2, R_3, \cdots$$

を取ってもよいから,

$$\sum_{x_0}\chi(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sign}(R_{k-1}R_k). \tag{1}$$

左辺においては x_0 は $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ のすべての実根で, x が増大しながら x_0 を通過するとき fg が $-$ から $+$ に変わるか, $+$ から $-$ に変わるか, または符号を変えないかに従って, $\chi(x_0)$ を $+1$, -1, または 0 とするのである (§ 16).

$f(x), g(x), h(x), \cdots$ の間における次々の次数の低下が ν, ν', ν'', $\cdots$ であるときには, $V(-\infty)-V(\infty)$ を $R_0=1$, R_ν, $R_{\nu+\nu'}$, $R_{\nu+\nu'+\nu''}, \cdots$ (これらの R_k のみが 0 にならない) の符号から計算すれば, 次の結果を得る.

前にいった通り (349 頁)

$$R_0=1,$$
$$R_\nu=\varepsilon_\nu(ab)^\nu,$$
$$R_{\nu+\nu'}=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}(ab)^\nu(bc)^{\nu'},$$

$$R_{\nu+\nu'+\nu''}=\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}\varepsilon_{\nu''}(ab)^\nu(bc)^{\nu'}(cd)^{\nu''}, \cdots$$

いま f と g の間における符号の変りを v とすれば

$v(\infty)$ は　　a, b の間

$v(-\infty)$ は $(-1)^n a$，$(-1)^{n-\nu}b$ の間，したがって a，$(-1)^\nu b$ の間の符号の変りの数であるから，

ν が偶数ならば，　　$v(-\infty)-v(\infty)=0$，

ν が奇数ならば，　　$=\mathrm{sign}(ab)=\varepsilon_\nu\,\mathrm{sign}(R_0R_\nu)$.

さて，ν が奇数のときには

$$\varepsilon_\nu=(-1)^{\nu\cdot\frac{\nu-1}{2}}=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$$

であるから，いま

$$\left.\begin{array}{l}\nu \text{ が偶数ならば，} e_\nu=0\\ \nu \text{ が奇数ならば，} e_\nu=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

とおけば，上の二つの場合をまとめて

$$v(-\infty)-v(\infty)=e_\nu\,\mathrm{sign}(R_0R_\nu).$$

次に g と h との間の符号の変りを v' とすれば

$v'(\infty)$ は　　b，c の間

$v'(-\infty)$ は $(-1)^{n-\nu}b$，$(-1)^{n-\nu-\nu'}c$ の間，したがって b，$(-1)^{\nu'}c$ の間の符号の変りであるから，ν' が偶数ならば $v'(-\infty)-v'(\infty)=0$ でまた ν' が奇数ならば

$$v'(-\infty)-v'(\infty)=\mathrm{sign}(bc).$$

しかるに

$$R_\nu R_{\nu+\nu'}=\varepsilon_{\nu'}(ab)^{2\nu}(bc)^{\nu'}$$

ゆえに

$$v'(-\infty)-v'(\infty)=\varepsilon_{\nu'}\,\mathrm{sign}(R_\nu R_{\nu+\nu'})$$

よって $e_{\nu'}$ を前のようにおいて $\left(e_{\nu'}=0 \text{ または } (-1)^{\frac{\nu'-1}{2}}\right)$

$$v'(-\infty)-v'(\infty)=e_{\nu'}\mathrm{sign}(R_\nu R_{\nu+\nu'})$$

以下同様である．このような次々の多項式の間の符号の変りの和がすなわち Sturm の定理における V であるから

$$\sum \chi(x_0)=V(-\infty)-V(\infty)$$
$$=e_\nu \mathrm{sign}(R_0R_\nu)+e_{\nu'}\,\mathrm{sign}(R_\nu R_{\nu+\nu'})+e_{\nu''}\,\mathrm{sign}(R_{\nu+\nu'}R_{\nu+\nu'+\nu''})$$
$$+\cdots \tag{3}$$

$e_\nu, e_{\nu'},\cdots$ は（2）の通り．

この公式は一般である．$\nu=\nu'=\nu''=\cdots=1$ のときは上の（1）になる．また f と g とが同次（$\nu=0$）のときにも通用する．この場合には $e_0=0$ として，第一項を省けばよい．

いうまでもなく（344, 354, 356 頁参照）

$$R_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k-1} \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-2} \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k-2} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot & a_k \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdot\ \cdot & b_k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & d_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdot & \cdot & d_{kk} \end{vmatrix}={a_0}^{2k}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & c_k \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_k & c_{k+1} & & \cdot & c_{2k-1} \end{vmatrix}.$$

〔**問題**〕 実係数の方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \qquad (a_0>0)$$

のすべての根が虚数軸の左側にあるために必要かつ十分な条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n & \end{vmatrix}$$

の首座小行列式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ がすべて正であることである（Hurwitz の問題，97 頁参照）.

〔解〕 仮定によって，x が虚数軸の上を $+i\infty$ から $-i\infty$ まで動くとき $\operatorname{arc} f(x)$ は $n\pi$ だけ減少する．すなわち $x=-iz$,

$$f(-iz)=(-i)^n\{a_0z^n-a_2z^{n-2}+a_4z^{n-4}-\cdots+i(a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+a_5z^{n-5}-\cdots)\},$$

$$\phi(z)=a_0z^n-a_2z^{n-2}+a_4z^{n-4}-\cdots$$

$$\psi(z)=a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+a_5z^{n-5}-\cdots$$

とおくとき，ϕ, ψ からの Sturm の函数列において

$$V(-\infty)-V(\infty)=\sum\chi(x_0)=n. \tag{4}$$

ゆえに ϕ, ψ に関する $R_1, R_2, \cdots, R_n$ はみな正である．R_k は $2k$ 次の行列式で，その形は次の通りである

$$\begin{array}{l} \\ 1) \\ \\ 2) \\ \\ 3) \\ \\ 4) \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & 0 & -a_6 & 0 & \cdot & \cdot \\ & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & a_5 & 0 & -a_7 & \cdot & \cdot \\ & a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & 0 & -a_6 & \cdot & \cdot \\ & & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & a_5 & 0 & \cdot & \cdot \\ & & a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & 0 & \cdot & \cdot \\ & & & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & a_5 & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & 0 & -a_2 & 0 & a_4 & \cdot & \cdot \\ & & & & a_1 & 0 & -a_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

行列式 R_{2k} を k 次に縮小して，上の Hurwitz の形に変えることができる．

たとえば

$$R_1=\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ & a_1 \end{vmatrix}=a_0a_1,\qquad R_2=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & -a_2 & 0 \\ & a_1 & 0 & -a_3 \\ & a_0 & 0 & -a_2 \\ & & a_1 & 0 \end{vmatrix}=a_0a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

上のような計算によらないで，直接に多項式の形から一層簡単な結果を得る．(4) は ϕ, ψ の根が全部実数で，かつ互いに隔離すること（かつ $a_0a_1>0$）と同一である（§16, 問題 1, 2).

$n=2m$ なるときは，$z^2=-x$ として

$$\varphi(x)=a_0x^m+a_2x^{m-1}+\cdots+a_{2m},$$
$$\psi(x)=a_1x^{m-1}+a_3x^{m-2}+\cdots+a_{2m-1}$$

とおけば，上の条件は $\phi(x), \psi(x)$ の根が全部負数で，かつ互いに隔離するというのと同じである．この場合の $R_1, R_2, \cdots, R_m$ は

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & a_{2m} & & & \\ & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & a_{2m-1} & \cdot & \cdot & \\ & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} & \cdot & \\ & & a_1 & \cdot & \cdot & & a_{2m-1} & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & a_{2m} & \\ & & & & a_1 & \cdot & \cdot & a_{2m-1} & \end{vmatrix}$$

における 2 次，4 次，…，$2m$ 次の首座行列式である．すなわち $a_0A_1, a_0A_3, \cdots, a_0A_{2m-1}$ に等しい．よって隔離の条件から，$a_0>0$ なる仮定のもとにおいて(359頁（1），参照)

$$A_1>0,\quad A_3>0, \cdots, A_{2m-1}>0. \tag{5}$$

それに $\varphi(z)$ の根がすべて負であることから

$$a_2>0,\quad a_4>0, \cdots, a_{2m}>0. \tag{6}$$

これらが必要かつ十分なる条件である．すなわち Hurwitz の条件のうち $A_2>0, A_3>0, \cdots, A_{2m}>0$ を（6）でおき換えることができるのである．

あるいはまた $x\psi(x)$ が正根をもたず，かつ $\varphi(x)$ の根と互いに隔離することから

$$\left.\begin{array}{l} a_1>0,\ a_3>0, \cdots,\ a_{2m-1}>0 \\ A_2>0,\ A_4>0, \cdots,\ A_{2m}>0 \end{array}\right\}$$

を得る．

$n=2m+1$ が奇数であるときも同様である．ただしこの場合には

$$\varphi(x)=a_0x^m+a_2x^{m-1}+\cdots+a_{2m}$$
$$\psi(x)=a_1x^m+a_3x^{m-1}+\cdots+a_{2m+1}$$

とおくのである．

要約すれば，$a_0>0$ という仮定のもとにおいては，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ が全部正であることが必要な条件，その上に $A_1, A_2, A_3, \cdots$ かあるいはまた $A_2, A_4, A_6, \cdots$ かが正ならば十分である．

§ 75.　Sturm の問題と二次形式との連結

1.　Sturm の問題を二次形式論に連結することは Hermite の考案である．いまそれを説明するのに，われわれの立場からは Hermite にしたがって初めから出直すよりも，直ちに § 73 の結果を出発点とするのが便利である．

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

とおいて，$f(x)$ は n 次，$a_0\neq0$；$g(x)$ は n 次以下で，$f(x)$ と $g(x)$ との次数の差を ν とする．$\nu\geqq0$；$b_\nu\neq0$.

§ 73, 3 に示したように

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\sum d_{pq}x^{n-p}y^{n-q}\quad (p, q=1, 2, \cdots, n)\quad (1)$$

とすれば，$d_{pq}=d_{qp}$ であるから，d_{pq} を係数として n 元の二次形式を作ることができる．それを次のように表わす．

$$B(f, g)=\sum d_{pq}x_px_q.\qquad (p, q=1, 2, \cdots, n)$$

これを f, g に関する **Bézout の二次形式**と名づける．すなわち $B(f, g)$ は上の x, y の対称式において $x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x, 1$；$y^{n-1}, y^{n-2}, \cdots, y, 1$ に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を代入して得られるものである．

しからば次の定理が成り立つ．

〔定理 10.2〕　f, g の最大公約数の次数が m ならば，$B(f, g)$ の位は $n-m$ である．

$B(f, g)$ の符号定数を $\sigma(f, g)$（略して σ）とし f, g から Euclid の算法によって作った Sturm の函数列における符号の変りを V で表わせば，

$$\sigma=V(-\infty)-V(\infty).$$

〔証〕 $f(x)$ を $g(x)$ で割って

$$f(x)=q(x)g(x)-h(x)$$

を得たとして，

$$q(x)=q_0x^{\nu}+q_1x^{\nu-1}+\cdots+q_{\nu}$$

とおけば，

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} q(x) & 1 \\ q(y) & 1 \end{vmatrix} g(x)g(y)+\begin{vmatrix} g(x) & h(x) \\ g(y) & h(y) \end{vmatrix}.$$

さて

$$\frac{q(x)-q(y)}{x-y}=\sum_{k=0}^{\nu-1} q_k(x^{\nu-k-1}+x^{\nu-k-2}y+\cdots+y^{\nu-k-1})$$

から生ずる Bézout の行列 $B(q,1)$ は

$$Q=\begin{pmatrix} & & & & q_0 \\ & & & q_0 & q_1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0 & q_1 & \cdot & \cdot & q_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

であるが，便宜上，一時これを $[q_{\alpha\beta}]$ で表わして

$$\frac{q(x)-q(y)}{x-y}=\sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha\beta}x^{\nu-\alpha}y^{\nu-\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\cdots,\nu)$$

とする．しからば

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha\beta}x^{\nu-\alpha}g(x).\,y^{\nu-\beta}g(y)+\frac{g(x)h(y)-g(y)h(x)}{x-y}.$$

右辺の第一の和において

$$\left.\begin{matrix} x^{\nu-1}g(x),\, x^{\nu-2}g(x),\cdots,g(x) \\ y^{\nu-1}g(y),\ y^{\nu-2}g(y),\ \cdots,g(y) \end{matrix}\right\}$$ にそれぞれ $x_1',x_2',\cdots,x_{\nu}'$

を代入し，また第二の項においては

$$\left.\begin{matrix} x^{n-\nu-1}, x^{n-\nu-2}, \cdots, 1 \\ y^{n-\nu-1}, y^{n-\nu-2}, \cdots, 1 \end{matrix}\right\} \text{にそれぞれ } x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \cdots, x_n$$

を代入する．これは $B(f,g)$ に一次変形を行なって，変数 $x_1', x_2', \cdots, x_\nu'$ を入れたのにすぎない．

この変形の後の $B(f,g)$ の係数の行列は次の通りである．

$$\left(\begin{array}{c:c} Q & 0 \\ \hdashline 0 & B(g,h) \end{array}\right)$$

初めの ν 行 ν 列のところへは行列 Q を，終りの $n-\nu$ 行 $n-\nu$ 列のところへは $B(g,h)$ の行列をおいて，その他は0とする．

$f(x)$ と $g(x)$ とが同次のときには $(\nu=0)$，Q の部分がなくて，$B(f,g)=B(g,h)$.

次に $g(x)$ を $h(x)$ で割って商 $q'(x)$ と剰余 $-k(x)$ とを得たとし，$q'(x)$ に対する Q と同様の行列を Q' とし，$x_{\nu+1}, \cdots, x_k$ に前と同様の変形を行なうならば，$B(f,g)$ の行列は次のように分割される．

$$\begin{matrix} \nu \\ \nu \\ n-\nu-\nu' \end{matrix}\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q' & 0 \\ 0 & 0 & B(h,k) \end{pmatrix}$$

もし $g(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，$B(h,k)$ は 0 になる．

このような変形を続行して，ついに $B(f,\ g)$ の係数の行列を次のように分割することができる．

$$\begin{matrix} \nu \\ \nu' \\ \nu'' \\ \vdots \\ n-\sum\nu \end{matrix}\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Q' & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Q'' & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに $B(f,\ g)$ の位は逐次の商の次数の和に等しいから，定理の第一の部分は証明されたのである．

また σ は $Q, Q', Q'', \cdots$ の符号定数の和に等しい.

$$Q=\begin{pmatrix} & & & q_0 \\ & & q_0 & q_1 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0 & q_1 & \cdot & \cdot & q_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

の符号定数は (296 頁, 例)

ν が偶数ならば 0,

ν が奇数ならば $\operatorname{sign}(q_0)$.

さて $f(x)$ と $g(x)$ との二つの間の符号の変りを v で表わすならば $f=a_0x^n+\cdots$, $g=b_\nu x^{n-\nu}+\cdots$, $a_0=b_\nu q_0$ であるから, $v(-\infty)-v(\infty)$ は f, g の代わりに q_0x^n と $x^{n-\nu}$ とを取って計算することができる. すなわち

ν が偶数ならば 0,

ν が奇数ならば $\operatorname{sign}(q_0)$.

すなわち, ちょうど Q の符号定数に等しい. g と h との間の符号の変りを v' とすれば, $v'(-\infty)-v'(\infty)$ は Q' の符号定数に等しく, 以下同様である. そして $V=v+v'+v''+\cdots$ であるから, 定理の後の部分も証明されたのである.

2. Hurwitz は g/f の展開の係数 (§ 73, 4) で作られる二次形式

$$C(f,g)=\sum c_{p+q-1}x_px_q \qquad (p, q=1, 2, \cdots, n)$$

を用いた. すなわち係数の行列は次の通り.

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & & \cdot & \cdot & c_{2n-1} \end{pmatrix}$$

この二次形式 $C(f,g)$ にも上の定理がそっくり当てはまる.

実際

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\left(\frac{g(y)}{f(y)}-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\frac{f(x)f(y)}{x-y}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_k}{y^k}-\frac{c_k}{x^k}\right)\frac{f(x)f(y)}{x-y}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+y^{k-1})}{x^k y^k}f(x)f(y)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(\frac{f(x)f(y)}{xy^k}+\frac{f(x)f(y)}{x^2y^{k-1}}+\cdots+\frac{f(x)f(y)}{x^k y}\right).$$

右辺から整の部分を集めて

$$\frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=\sum_{p,q}c_{p+q-1}f_{n-p}(x)f_{n-q}(y)\quad(p,q=1,2,\cdots,n)$$

を得る．すなわち（§ 73, 3）

$$\sum_{p,q}d_{pq}x^{n-p}y^{n-q}=\sum_{p,q}c_{p+q-1}f_{n-p}(x)f_{n-q}(y).$$

ゆえに $C(f,g)$ から次の一次変形によって $B(f,g)$ を得る．

$$x_k=a_0x_k'+a_1x'_{k+1}+\cdots+a_{n-k}x_n'.$$
$$(k=1,2,\cdots,n)$$

すなわち $B\sim C$ で B と C とは位においても符号定数においても一致する．

3. 定理 10.2 によって $B(f,g)$ または $C(f,g)$ の符号定数 $\sigma(f,g)$ に等しいところの $V(-\infty)-V(\infty)$ は §74 の公式（1）または（3）によって与えられる．すなわち $B(f,g)$ の首座行列式 $R_1,R_2,\cdots,R_r$ が一つも 0 にならないときには σ はそれらの間の符号の続きと変りとの数の差に等しいのであるが，ここで著しい事実は，これらの首座行列式の中で 0 になるものがいくつ続いても，上の公式（3）によって σ が求められることである．著しいというのは，§ 63,（2）と比較していう．

4. 上に述べた Hermite の考案は，次のような着想に基づくのである．n 次の実方程式 $f(x)=0$ の根を $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ とし，便宜上複根はないものと仮定する．$\varphi(\alpha; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は根に関しては有理式，変数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に関しては斉次一次式で，かつ係数は実数とする．この式 φ を適当に選んで，$f(x)$ の相異なる根 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ を α に代入するとき，$\varphi(\alpha; t)$, $\varphi(\beta; t), \cdots, \varphi(\lambda; t)$ が $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の一次式として互いに独立であるようにする．さて ξ を実数として

$$F_\xi = \sum (\alpha-\xi)\varphi(\alpha; t)^2$$

という和を $f(x)$ のすべての根に関して作れば，F_ξ は $t_1, \cdots, t_n$ の実二次形式で，それを標準形式にすれば，ξ よりも大きい実根 α からは正項，ξ よりも小さい実根 α からは負項，また互いに共役な二つの根からは $(L+Mi)^2+(L-Mi)^2=(L^2-M^2)$ のように一つの正項と一つの負項とが出るから，F_ξ の符号定数を $\sigma(F_\xi)$ とすれば，それは ξ よりも大きい実根と ξ よりも小さい実根との数の差である．ゆえに $\xi<\eta$ とすれば

$$N=\frac{1}{2}\{\sigma(F_\xi)-\sigma(F_\eta)\} \tag{1}$$

が，すなわち区間 $\xi<x<\eta$ における $f(x)=0$ の根の数である．

F_ξ は根の対称式として計算することができる．

この計算は Hermite がなしたように，

$$\varphi(\alpha; t)=f_0(\alpha)t_1+f_1(\alpha)t_2+\cdots+f_{n-1}(\alpha)t_n$$

とすれば，最も簡単である．すなわち

$$F_\xi=\sum \alpha\varphi(\alpha; t)^2-\xi\sum\varphi(\alpha; t)^2=F_0-\xi F$$

とおけば

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum\frac{1}{x-\alpha},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(y)}{f(y)}=\sum\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{y-\alpha}\right)=-(x-y)\sum\frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$$

$$\frac{f(x)f'(y)-f(y)f'(x)}{x-y}=\sum\frac{f(x)}{x-\alpha}\cdot\frac{f(y)}{y-\alpha}$$

$$=\sum(f_0(\alpha)x^{n-1}+f_1(\alpha)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(\alpha))(f_0(\alpha)y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(\alpha)).$$

$\sum$ はもちろん $f(x)=0$ の根 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ に関する和である．

よって

$$F=B(f,f') \tag{2}$$

同じように

$$F_0=B(f,xf'). \tag{3}$$

上文において $f(x)=0$ の根 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ をみな相異なるものとしたけれども，複根がある場合にも（2），（3）は成立する．またこの場合に F_ξ の位は n よりは低いけれども，$\sigma(F_\xi)$ は実根のうち ξ よりも大きいものと小さいものとを複数を計算に入れずに数えた数の差であるから，（1）はやはり成立する．

ξ が実根 α に等しいときには，F_α においては $(\alpha-\xi)\varphi(\alpha,t)^2$ が消失する．この場合には，（1）は次のように変更されなければならない．

$$N+e_\xi+e_\eta=\frac{\sigma(F_\xi)-\sigma(F_\eta)}{2}$$

e_ξ，は ξ が実根であるときには $\frac{1}{2}$ に等しく，そうでなければ 0 に等しい．e_η も同様である．

一般に，$f(x)$ を n 次，$g(x)$ を n 次以下の多項式として，$f(x)$ が複根をもたないとの仮定のもとにおいて，部分分数への分解

$$\frac{g(x)}{f(x)}=c_0+\sum\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}\cdot\frac{1}{x-\alpha}$$

を用いて，上の計算を行なえば

$$\sum\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}\varphi(\alpha,t)^2=B(f,g)$$

を得る．これが $B(f,g)$ を $f(x)$ の根の対称式として表わす公式である．

この公式によれば定理 10.2 に述べた $B(f,g)$ の符号定数の意味が一見して明瞭である．α が $f(x)=0$ の実根であるとき，一般的に（§ 16）

$$\chi(\alpha)=\mathrm{sign}\left(\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)$$

であるからである．その欠点は $f(x)$ と $g(x)$ とに公約数がなく，また $f(x)$

が複根をもたないという事実上不要な仮定が計算の基礎になっているところにある.

5. ついでに Hurwitz の考案の大要を述べる.

$$\frac{g(x)}{f(x)}=c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots$$

とし，また

$$\varphi(x)=t_1+t_2x+t_3x^2+\cdots+t_nx^{n-1}$$

とおけば

$$\frac{g(x)\,\varphi(x)^2}{f(x)}$$

の展開における $\dfrac{1}{x}$ の係数はすなわち二次形式 $C(f,g)$ である. しかるに上の有理式を部分分数に分解すれば，その分数の部分は単根の仮定のもとに

$$\sum\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}\cdot\frac{\varphi(\alpha)^2}{x-\alpha},$$

よって

$$\frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}+\cdots$$

を用いて，

$$C(f,g)=\sum\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}\varphi(\alpha)^2$$

$$=\sum\frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}(t_1+\alpha t_2+\cdots+\alpha^{n-1}t_n)^2.$$

ここでも $C(f,g)$ の符号定数の意味は明瞭であるが，単根の仮定を徹去することは，計算の簡明を損なわずには困難である.

Hermite の考案も Hurwitz の考案も直接に Sturm の問題と二次形式論とを連結するもので，一般的の場合には符号定数の意味が鮮かに示される. われわれが前に述べた方法では，Hermite および Hurwitz の結果の間の関係を説

明し，かつそれらを終結式論の系統中に摂取して，同時に問題の本質に無関係で，ただ方法の不備に由来する不要の仮定を撤去することができたのである．

〔**問題 1**〕 n 次の実方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ が相異なる n 個の実根をもつために必要かつ十分な条件は

$$D_1, D_2, \cdots, D_n$$

がすべて正であることである．ただし

$$D_k=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \cdot & \cdot & s_{2k-2} \end{vmatrix}$$

で，s_k は $f(x)=0$ の根の k 乗の和 $(s_0=n)$ である．

$f(x)=0$ が実根のみをもつために必要かつ十分な条件は

$$D_1>0,\ \cdots\cdots, D_r>0, D_{r+1}=\cdots=D_n=0$$

で，r が相異なる実根の数である．

〔解〕 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{s_0}{x}+\dfrac{s_1}{x^2}+\dfrac{s_2}{x^3}+\cdots$. よって $C(f,f')$ の行列が D_n になる．この場合には，$\chi(x_0)=1$ であるから，$\sigma(f,f')$ が実根の数（複数を数えず）である．ゆえに定理の初めの部分は明白である．さて $C(f,f')$ の位を r とすれば $n-r$ が f,f' の最大公約数の次数，したがって r が複数を数えない $f(x)$ の根の数である．このとき $D_r\neq 0$, $D_{r+1}=D,\cdots,D=0$（定理 10.1 参照）．

定理の後の部分は $\sigma=r$ である場合である．

〔**問題 2**〕 $f(x)$ は前の通りとして，$f(x)=0$ が相異なる n 個の正根をもつために必要かつ十分な条件は

$$D_1'>0,\ D_2'>0, \cdots, D_n'=0.$$

ただし

$$D_k'=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_k \\ s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \cdot & \cdot & s_{2k-1} \end{vmatrix}$$

〔解〕 $C(f, xf')$ の係数の行列が $[D_n']$ である．この場合には

$$\sigma(f, xf')=V(-\infty)-V(\infty)=\sum_{x_0>0}\chi(x_0)-\sum_{x_0<0}\chi(x_0).$$

すなわち f の正根と負根との数（複数を数えず）の差である．ゆえに問題の定理は明白である．

〔**問題 3**〕 $f(x)=0$ は n 次の方程式，$g(x)=0$ は $n-1$ 次以下の方程式で，ξ, η は $f(x)=0$ の根でないとして，$B(f, (x-y)g)$ の符号定数を σ_ξ とすれば

$$V(\xi)-V(\eta)=\frac{\sigma_\xi-\sigma_\eta}{2}$$

ただし V は f と g とに関する Sturm の函数列の符号の変りの数である．

〔解〕 $g(x)$ が n 次よりも低いときには

$$\sigma_\xi=\sum_{\xi}^{\infty}\chi(x_0)-\sum_{-\infty}^{\xi}\chi(x_0).$$

右辺の二つの和は $f(x)/g(x)=0$ の実根のうち ξ よりも大きいものと ξ よりも小さいものとに関する和である．

$g(x)$ が n 次のときには，$g(x)=cf(x)+g_0(x)$，$g_0(x)$ は $n-1$ 次以下として

$$\sigma_\xi=\mathrm{sign}(c)+\sigma(f, (x-\xi)g_0).$$

これから問題の定理を得る．

〔**問題 4**〕 任意の係数をもつ方程式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

の根がすべて単位円の内部にあるために必要かつ十分な条件は，$f(z)$ を斉次の形 $f(z_1, z_2)$ にしるして

$$f(t+i, t-i)=U(t)+iV(t)$$

とおくとき，

$$\sigma(U, V)=n$$

である．

この条件を次のように変形することができる．

$$f^*(z)=\bar{a}_n z^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-2}+\cdots+\bar{a}_0$$

とおいて，f, f^* から Bézout の形式を作って，その係数を d_{pq} とすれば，d_{pq} は複素数ではあるが，§73 の d_{pq} の式から見える通り

$$\bar{d}_{p,q}=d_{n-p+1,\ n-q+1}=d_{n-q+1,\ n-p+1}.$$

ゆえに

$$H=\begin{vmatrix} d_{1n} & d_{1,n-1} \cdot & \cdot & d_{11} \\ d_{2n} & d_{2,n-1} \cdot & \cdot & d_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot \\ d_{nn} & d_{n,n-1} \cdot & \cdot & d_{n1} \end{vmatrix}$$

は一つの H 形式の係数の行列である．この H 形式は $B(U, V)$ と対等である．$B(U, V)$ は二次形式としたが，その変数を互いに共役な2組の変数でおき換えて H 形式を得る．ここではその H 形式を $B(U, V)$ とする．二次形式としても，H 形式としても，位および符号定数に変りはない．

よって上の条件は

$$\sigma(H)=n$$

になる．

なお一般に H の位が n のとき，符号定数を σ とすれば，$f(z)=0$ の根の中で，単位円の内部および外部にあるものの数はそれぞれ

$$\frac{n+\sigma}{2}(\text{内部}),\quad \frac{n-\sigma}{2}\ (\text{外部})$$

である（定理 3.5）．$r<n$ でも，σ は両者の差に等しい．

〔解〕 $B\sim H$ だけを示せばよい．

$$f\ (t+i,t-i)=a_0(t+i)^n+\cdots+a_n(t-i)^n=U(t)+iV(t)$$

したがって $$f^*(t+i,t-i)=\bar{a}_n(t+i)^n+\cdots+\bar{a}_0(t-i)^n=U(t)-iV(t).$$

これが契点である．

§73,3 (355 頁) の公式において，g に f^* を代用し，かつ $x=\frac{t+i}{t-i}$, $y=\frac{t'+i}{t'-i}$ として分母を払えば

$$\begin{vmatrix} f(t+i,t-i) & f^*(t+i,t-i) \\ f(t'+i,t'-i) & f^*(t'+i,t'-i) \end{vmatrix} : (t-t')$$

$$=-2i\sum_{p,q}d_{pq}(t+i)^{n-p}(t-i)^{p-1}(t'+i)^{n-q}(t'-i)^{q-1}$$

$$=\begin{vmatrix} U(t)+iV(t) & U(t)-iV(t) \\ U(t')+iV(t') & U(t')-iV(t') \end{vmatrix} : (t-t')=-2i\begin{vmatrix} U(t) & V(t) \\ U(t') & V(t') \end{vmatrix} : (t-t')$$

ゆえに $B(U,V)=\sum d_{p,q}X_p\overline{X}_{n-q+1}$，ただし X_p は $(t+i)^{n-p}(t-i)^{p-1}$ の展開において t の各冪 t^k を x_k でおき換えた一次式である．

すなわち上記の通り $B(U,V)$ と H とが対等である．

〔**問題 5**〕 前の問題の行列 H の首座行列式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ を直接に係数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ を用いて次のような形に表わすことができる (Schur)．

$$D_n=\left|\begin{array}{cccc:ccccc} a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & a_n & & & & \\ & a_0 & \cdots & \cdot & a_{n-1} & a_n & & & \\ & & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & a_n & \\ \hdashline \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \cdots & \cdot & \bar{a}_0 & & & & \\ & \bar{a}_n & \cdots & \cdot & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & & & \\ & & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \\ & & & \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \cdots & \cdot & \bar{a}_0 & \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ n \\ \\ \\ \\ n \\ \\ \end{array}$$

とおいて，その n, $2n$ という二つの番号の 2 行 2 列を取り除いて D_{n-1} を作り，D_{n-1} から同じようにして D_{n-2} を作り，しだいにこのようにして，ついに

$$D_2=\left|\begin{array}{cc:cc} a_0 & a_1 & a_n & \\ & a_0 & a_{n-1} & a_n \\ \hdashline \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_0 & \\ & \bar{a}_n & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{array}\right|, \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ \bar{a}_n & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

に至るとすれば，

$$H_k=D_k$$

〔解〕 これは §73 で R_k を縮めて d_{pq} で表わした過程を逆にしたのにすぎない．

補　　遺

1. 正規行列

行列 A の行と列とを転置し，同時に各組成分子を共役複素数で置き換えたものを A^* で表わす．すなわち常例の記法でいえば

$$A^*=(\bar{A}')=(\bar{A})'.$$

しからば

$$(A^*)^*=A, \qquad (A+B)^*=A^*+B^*, \qquad (AB)^*=B^*A^*,$$

$$(\lambda A)^*=\bar{\lambda}A^*, \qquad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*.$$

H 行列（§68）の場合には，$H=H^*$.

U 行列（§68）の場合には，$U^*=U^{-1}$.

〔定義〕 正方行列 A が $AA^*=A^*A$ という条件を満たすとき，A を**正規**(normal) 行列という（Toeplitz).

ゆえに H 行列，U 行列などは，正規行列の特別の場合である．一般に正方行列 A を H 行列 H,K をもって一意的に次の形にすることができる：

$$A=H+iK, \qquad H=\frac{1}{2}(A+A^*), \qquad K=\frac{1}{2i}(A-A^*).$$

上の H,K が H 行列であることは明らかであるが，逆に

$$A=H_1+iK_1$$

で，H_1，K_1 が H 行列であるとすれば，$H+iK=H_1+iK_1$ から $H-H_1=i(K_1-K)$．ここで $i(K_1-K)$ が H 行列であることから，$i(K_1-K)=-i(K_1^*-K^*)=-i(K_1-K)$，すなわち $2i(K_1-K)=0$．ゆえに $K_1=K$，したがって $H_1=H$．すなわち $A=H+iK$ において H，K は一意的である．

〔定理 1〕 A が正規であるためには，$HK=KH$ が必要かつ十分である．

〔証〕 $A^*=H^*-iK^*=H-iK$ を用いる．

$$AA^* = H^2 + K^2 - i(HK - KH),\quad A^*A = H^2 + K^2 + i(HK - KH)$$

すなわち $AA^* = A^*A$ は $HK = KH$ と同等である：

〔**定理 2**〕 正規行列を U 行列で変形すれば正規行列が生ずる.

〔**証**〕 直接に計算しても，あるいは定理1を用いても，すぐにわかる.

〔**定理 3**〕 正規行列は U 行列によって対角線型に変形される. これが正規行列の特性である.

〔**証**〕 定理1を用いるならば，交換可能な H 行列 H, K が同一の U 行列で，同時に対角線形に変形されることを示せばよい.

H を U で標準形に変形し，相異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ に対応して

$$H_0 = U'HU = \begin{vmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_s \end{vmatrix} \qquad \text{ただし}\quad H_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & & & \\ & \alpha_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_i \end{vmatrix}$$

(ν_i 次) とする，$\sum \nu_i = n$. この U で K を変形すれば，$HK = KH$ から

$$K_0 = U'KU = \begin{vmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_s \end{vmatrix}$$

を得る. K_i は ν_i 次の H 行列である. よって $K_1, K_2, \cdots, K_s$ を標準形にする U 行列を $U_1, U_2, \cdots, U_s$ とすれば，それらによって $H_1, H_2, \cdots, H_s$ は変わらない. すなわち初めの U と

$$\begin{vmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_s \end{vmatrix}$$

とを結合して作られる U 行列によって正規行列 $A = H + iK$ が標準形に変形される.

〔注意〕 同様の方法によって交換可能な正規行列が同一の U 行列で同時に標準形に変形されることが証明される.

〔**定理 4**〕 二重一次式 $A(x, \bar{x}) = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ の係数が正規行列 A をなすときは，$\sum |x|^2 \leqq 1$ なる (x) に対してそれの取る値域は A の固有値を含む最小の凸多角形である.

〔証〕 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を A の固有値とすれば，$A(x, \bar{x}) = \sum \alpha_\nu X_\nu X_\nu, \sum |X_\nu|^2 \leqq 1$ から明らかである．

2. 単　因　子

ここでは有理整数を組成分子とする行列のみを考察する．このような行列 P の逆行列 P^{-1} が同じ性質をもつためには，行列式 $|P| = \pm 1$ であることが必要かつ十分である．そこで

$$B = PAQ, \qquad |P| = \pm 1, \qquad |Q| = \pm 1$$

であるとき，A は B と対等であるという．対等の関係は次の三つの条件に適する．

1° 反射的．A はそれ自身と対等である（P, Q が単位行列）．

2° 対称的．A が B と対等ならば，B は A と対等である（$B = PAQ$ ならば，$A = P^{-1}BQ^{-1}$）．

3° 推移的．A が B と対等，B が C と対等ならば，A は C と対等である（$PAQ = B$，$RBS = C$ ならば $(RP)A(QS) = C$）．

A からそれと対等な $B = PAQ$ を作ることを A を P, Q で変形するという．

次に掲げる変形を基本変形という．

（1） 行列 A の一つの行または一つの列に -1 を掛けること．

これは単位行列の対角線上で i 番目を -1 に変えた行列を A の左または右から掛けることにほかならない．

（2）行列 A の第 j 行〔または列〕に整数 c を掛けて第 i 行〔または列〕に加える．

これは単位行列の (ij) の位置の 0 を c に変えた行列を左または右から A に掛けることにほかならない．

（3） 行列 A の第 i 行と第 j 行〔または列〕を入れかえること．

これは単位行列に同じ入れかえをした行列を A の左または右から掛けるこ

とにほかならない．

行列 A に上の基本変形をいくたびか行なうとき，常に A と対等な行列が得られる．このようにして A を次のような標準形に変形することができる．その標準形は

$$A_0=\begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_r \end{pmatrix}$$

ここで e_i は e_{i-1} で割り切れる．r は A の位で，空所はすべて 0.

〔証〕 基本変形によって A の組成分子のうち0を除いて絶対値の最小のものが成るべく小さくなるようにする．そのために最小絶対値の組成分子を（3）によって a_{11} の位置に移す．そのとき第 1 列の組成分子 a_{p1} が a_{11} で割れないならば，$a_{p1}=qa_{11}+r$, $|r|<|a_{11}|$ とし，（2）によって第1行に $-q$ を掛けて第 p 行に加えるならば，a_{p1} の位置が r になって $|r|<|a_{11}|$ になる．第1行に関しても同様である．もしも第1行第1列の組成分子がすべて a_{11} で割れるならば，（2）によって a_{11} 以外第1行，第1列をすべて0にすることができる．そのときもし第2行第2列以下で a_{ij} が a_{11} で割れないならば，$a_{ij}=qa_{11}+r$, $|r|<|a_{11}|$ として，（2）によって第1行に$-q$を掛けて第 i 行に加えて後，第1列を第 j 列に加えるならば，a_{ij} のところが r になって $|r|<|a_{11}|$. このような操作をいくたびか繰り返せば，行列の組成分子は有理整数なのだから，ついには行列が次のような形

$$\left(\begin{array}{c|c} e_1 & 0\cdots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

になって，A_2 の所の組成分子はすべて e_1 で割れる．

この行列の第2行，第2列以下に基本変形を行なって，この行列を

$$\left(\begin{array}{cc|c} e_1 & 0 & \cdots\ 0 \\ 0 & e_2 & \cdots\ 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & & A_3 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$$

の形にすることができるが，ここでは A_3 のところの組成分子はすべて e_2 で割れるが，その e_2 は e_1 で割れるはずである．

このようにして，ついに上の標準形 A_0 に達する．

さて基本変形によって，行列 A の位 r はもちろん変わらないが，A の s 次 $(s=1,2,\cdots,r)$ の小行列式の最大公約数 d_s（それを A の s 次の行列式因子という）も変わらないことは見やすい．ゆえに d_s は A の代わりに標準形 A_0 から求められる．すなわち $d_s=e_1e_2\cdots e_s$ である．したがって $e_s=d_s/d_{s-1}$．これが標準形の組成分子 e_s の意味である．$e_1, e_2, \cdots, e_r$ を行列 A の**単因子** (elementary divisor) という．

〔注意〕 A が n 次の正方形行列で $|A|=\pm1$ ならば，A に関して $r=n$, $e_1=\cdots=e_n=1$ だから，A の標準形は単位行列である．ゆえに $|P|=\pm1$ である行列は基本変形の行列から結合によって作られる．

有理整数の代わりに一つの変数 x の多項式を組成分子とする行列 A に同様の考察が適用される．その場合には変形に用いる行列 P, Q は x の多項式を組成分子として，しかも行列式 $|P|$, $|Q|$ は 0 と異なる定数というものである．また基本変形（1）において乗数 -1 の所は 0 と異なる任意の定数とするのである．そうして証明の中で組成分子の絶対値を小さくする所は，組成分子である多項式の次数を低くすることにすればよい．

人　　名

アーベル	Abel, N. H.,	1802～1829
ベズウ	Bézout, E.,	1730～1783
ボルツァノ	Bolzano, B.,	1781～1848
カルダノ	Cardano, Geronimo,	1501～1576
コーシー	Cauchy, A. L.,	1789～1857
ケーレー	Cayley, A.,	1821～1895
クラーメル	Cramer, G.,	1704～1752
デカルト	Descartes, R.,	1596～1650
アイゼンスタイン	Eisenstein G.,	1823～1852
ユークリッド	Euclid,	(−300)
オイラー	Euler, L.,	1707～1783
フェラリ	Ferrari, Lodovico,	1522～1565
フーリエ	Fourier, J. B. J.,	1768～1830
フロベニウス	Frobenius, G.,	1849～1917
ガウス	Gauss, K. F.,	1777～1855
グラスマン(父)	Grassmann, H.,	1809～1877
ハミルトン	Hamilton, W. R.,	1805～1865
ヘルミート	Hermite, Ch.,	1822～1901
フルウィッツ	Hurwitz, A.,	1859～1919
ヤコービ	Jacobi, C. G. J.,	1804～1851
クロネッカー	Kronecker, L.,	1823～1891
ラグランジュ	Lagrange, J. L.,	1736～1813
ラゲル	Laguerre, E.,	1834～1886
ラプラス	Laplace, P. S.,	1749～1827
ルジャンドル	Legendre, A.M.,	1752～1833

ライプニッツ	Leibniz, G. W.,	1646～1716
ニュートン	Newton, I.,	1642～1727
ロル	Rolle, M.,	1652～1719
ルーシェ	Rouché, E.,	1840～1910
スツルム	Sturm, Ch.,	1803～1855
シルベスター	Sylvester, J. J.,	1814～1897
テーロル	Taylor, B.,	1685～1731
チルナウス	Tschirnhaus, W. von,	1651～1708
バンデルモンデ	Vandermonde, A. T.,	1735～1796
ワイヤストラス	Weierstrass, K.,	1815～1897

学術語，索引および対訳

数字は初出のページ数，D. はドイツ語，F. はフランス語.

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W

Y

Z

代 数 学 講 義

改訂新版

検 印
省 略

1930年 7月 1日 初版 1 刷発行
1947年 11月 5日 初版 13 刷発行
1948年 11月 15日 改訂 1 刷発行
1961年 3月 20日 改訂 14 刷発行
1965年 11月 25日 改訂新版 1 刷 発行
1999年 10月 10日 改訂新版 27 刷 発行

著 者 高 木 貞 治

発行者 南 條 光 章
東京都文京区小日向4丁目6-19

印刷者 竹 内 一
東京都荒川区東日暮里6丁目20-9

発行所 東京都文京区小日向4丁目 6-19
電話 東京(3947) 局2511 (代表)
振替口座 00110-2-57035番
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/
共立出版株式会社

壮光舎印刷・関山製本 NDC 411.3 Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会 員

ISBN 4-320-01000-0